EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

En un péndulo simple, el periodo T no depende de la masa que cuelga ni de la amplitud de la oscilación, únicamente depende de la longitud del péndulo L y del valor de la aceleración de la gravedad g, según la expresión $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Si consideramos $g = 32{,}09 pies/s^2 \pm 0{,}15$; $\pi = 3{,}142$ con tres cifras decimales exactas. $L = 2{,}5 pies \pm 0{,}02$.

a) **(2.5ptos)** Determine el error absoluto que se obtiene al aproximar el periodo del péndulo.
b) **(1.5ptos)** Determine el periodo T en base binaria, para ello considere un sistema basado en la norma IEEE-754 con las siguientes características: Almacenamiento de 8 bits. Para el signo 1 bit; Exponente 3 bits; Mantisa 4 bits. Use solamente los 02 primeros decimales.
c) **(1.0pto)** Desarrolle un script en MATLAB que determine el periodo T en base binario en el sistema IEEE-754 doble precisión.

Problema 2

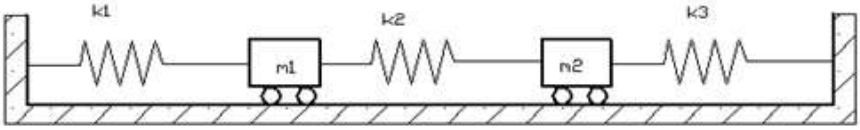
Un proyectil se mueve en el plano x-y siguiendo la siguiente trayectoria:
$y = a\sqrt{x} + b\,x + c$
Pasando por los siguientes puntos:

x (m)	4	9	25
y (m)	30	60	150

a) **(2.0 ptos)** Determine el sistema de ecuaciones lineales para hallar a, b y c y obtener la factorización de Crout para la matriz del sistema.
b) **(1.5 ptos)** Resuelva los sistemas triangulares obtenidos en a)
c) **(0.5 ptos)** Si x=t, obtener el módulo del vector velocidad en t=9 seg.
d) **(1.0 punto)** Escriba un código MATLAB para la parte c)

Problema 3

Dado el siguiente sistema dinámico y sus ecuaciones de movimiento:



$$[M]\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{bmatrix}+[K]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\quad M=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}\quad K=\begin{bmatrix}50 & -40\\ -40 & 80\end{bmatrix}\quad \ddot{X}=AX=-M^{-1}KX$$

a) **(2.0 ptos)** Determine todos los valores propios y el vector propio dominante de A, usando el método directo.
b) **(1.0 pto)** Localice el dominio de los valores propios mediante Gerschgorin.
c) **(2.0 ptos)** Realice 03 iteraciones usando el método de la Potencia Inversa Iterada, considerando “q=-10”. Aproxime el error en la tercera iteración para el vector propio e indique a que valor propio converge. $X^{(0)}=[0\ \ 1]^T$.
Use $B=(A-qI)^{-1}$

Problema 4

Las tablas termodinámicas para hallar la presión (p) de vapor del agua en función a la temperatura (T) podrían aproximarse con el siguiente modelo matemático:

$$p(T)=\frac{e^{60.433-\frac{6834.271}{T+273.16}-5.16923Ln(T+273.16)}}{1000}$$

T en °C y T> 0 °C
p en kPa

Se desea determinar ¿Cuál es la temperatura en °C para el cual la presión de vapor es de 18kPa, si se sabe que debe estar entre 50°C y 60°C?

a) **(3.0 ptos)** Utilice el método de la Bisección con el rango conocido en 2 iteraciones.
b) **(1.0 pto)** ¿Cuantas iteraciones se necesitan con el método de la Bisección para tener un error de 0.001 °C?
c) **(1.0 pto)** Desarrolle una rutina en MATLAB que permita encontrar la solución mediante el método de Newton-Raphson, usando 1000 iteraciones.

Los Profesores

Solucionario Problema 1

(a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$\epsilon_L = 0{,}02; \quad \epsilon_g = 0{,}15; \quad \epsilon_\pi = 0{,}0005$$

$$\epsilon_T = \left|\frac{\partial T}{\partial L}\right| \epsilon_L + \left|\frac{\partial T}{\partial g}\right| \epsilon_g + \left|\frac{\partial T}{\partial \pi}\right| \epsilon_\pi$$

$$= \left|\frac{\pi}{\sqrt{Lg}}\right| \epsilon_L + \left|-\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{L}{g}}\right| \epsilon_g + \left|2\sqrt{\frac{L}{g}}\right| \epsilon_\pi = 0{,}007 + 0{,}0041 + 0{,}000279 = 0{,}0114$$

(b)

$$T = 2 \times 3{,}142 \times \sqrt{\frac{2{,}5}{32{,}09}} = 1{,}7540$$

$$1{,}75 = 1{,}11_2 \times 2^0$$

0	**0**	**1**	**1**	1	1	0	0
Signo	**Exponente**			Mantisa			

(c)

```
%Doble Precision
N1=sprintf('%bx',1.75)
N2=hex2dec(N1)
N=dec2bin(N2)

n=length(N)

%Completando con cero a la izquierda.

for k=1:64-n

N=strcat('0',N)

end
```

Solucionario Problema 2

a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 5 & 25 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Factorización de Crout

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 5 & 25 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 15 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

Resolviendo los sistemas triangulares

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 15 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \\ 150 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$r(t) = \left(t,\, a\sqrt{t} + b\,t + c\right) = \left(t,\, 5\sqrt{t} + 5\,t\right)$$

$$v(t) = r'(t) = \left(1,\, \frac{5}{2\sqrt{t}} + 5\right)$$

$$\|v(t)\| = \sqrt{1 + \left(\frac{5}{2\sqrt{t}} + 5\right)^2}$$

$$\|v(9)\| = 5.9184\, m/s$$

d)

```
a=5, b=5, c=0
syms t
x=t
y=a*sqrt(t)+b*t+c
vx=diff(x)
vy=diff(y)
v=sqrt(vx^2+vy^2)
subs(v,9)
```

Solucionario del problema 3

a) $A = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$ Ec. característica: $\det\left(\begin{bmatrix} -(\lambda+5) & 4 \\ 4 & -(\lambda+8) \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + 13\lambda + 40 = 0$

$\lambda_1 = -10.7720$

$\lambda_2 = -2.2280$

Vector propio dominante: $x_1 = \begin{bmatrix} -0.6930 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Por tratarse de una matriz simétrica todos los valores propios son reales
Solo tomaremos el eje real

$|\lambda + 5| \le 4 \quad --> -9 \le \lambda \le -1$

$|\lambda + 8| \le 4 \quad --> -12 \le \lambda \le -4$

c) Algoritmo de la potencia inversa iterada

1. $x^{(k+1)} = (A - qI)^{-1} x^{(k)}$
2. u_{k+1} =max($x^{(k+1)}$) considerando el signo
3. Normalizar el vector $x^{(k+1)} = x^{(k+1)} / u_{k+1}$
4. Si error=norma($x^{(k+1)}$ - $x^{(k)}$,inf) <tol
   Actualizar $x^{(k)} = x^{(k+1)}$ regresar a paso 1.
   En caso contrario salir (1/u+q , $x^{(k+1)}$)

	$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$
	0 1.0000	-0.8000 1.0000	-0.6829 1.0000	-0.6940 1.0000	**-0-6929** **1.0000**
u		-0.8333	-1.3667	-1.2886	-1.2960
1/u+q		-11.2000	-10.7317	-10.7760	-10.7716

Tercera it -Error $=\left\| x^{(4)} - x^{(3)} \right\|_{\infty}$=0.0011 (2 c.d.e.)
El método converge al valor propio y vector propio dominante.

Solucionario Problema 4
Parte a)

Utilizando la función f(t)=p(t)-18=0

$$f(t) := \frac{e^{60.433 - \frac{6834.271}{t+273.16} - 5.16923 \cdot \ln(t+273.16)}}{1000} - 18$$

$f(50) = -5.715$	$f(55) = -2.337$	$f(60) = 1.8$
$f(55) = -2.337$	$f(57.5) = -0.372$	$f(60) = 1.8$
$f(57.5) = -0.372$	$f(58.75) = 0.687$	$f(60) = 1.8$

Por lo tanto t=58.75 °C

Parte b)

Usando

$$\varepsilon_a^{\ k} = \frac{b-a}{2^k} \qquad \log\left(\frac{60-50}{0.001}, 2\right) = 13.288$$

K=14 iteraciones

Parte c)

```
f='exp(60.433-6834.271/(t+273.16)-5.16923*log(t+273.16))/1000-
18';
df=inline(diff(f));
f=inline(f);
x=55;
for i=1:1000
    x=x-f(x)/df(x)
end
disp(x)
```