EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION:110 MINUTOS**

Problema 1

Para investigar cierto experimento relacionado a la concentración de una sustancia se ha medido los datos mostrados en la siguiente tabla:

t	0	0.5	1.0	∞
y(t)	1.6667	3.4572	4.5472	5

$$y(t) = \frac{L}{1 + ae^{-bt}}$$

a) **(1.0 pto)** Determine el Polinomio que pasa por tres puntos medidos, usando el polinomio de Newton.
b) **(1.0 pto)** Extrapole y(3), usando el polinomio obtenido en a). Comente sus resultados.
c) **(1.0 pto)** Use regresión por mínimos cuadrados para obtener a y b .
Nota: Debe antes modificar la función y(t) para obtener la función de regresión.
d) **(1.0 pto)** Determine $y(3)$.¿Cuál de los dos métodos es mejor para la proyección de la función cuando t= 3 segundos?
e) **(1.0 pto)** Use los comandos del **MATLAB** para resolver la parte c).

Problema 2

Se desea calcular la longitud de arco $\boldsymbol{S}$ de la curva $\boldsymbol{y^2=x^3}$, desde (1,-1) a (1,1):

a) **(0.5 pto)** Demostrar que: $S = \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{4+9t^2}\,dt$
b) **(1.5 ptos)** Resolver mediante cuadratura de Gauss (N=3)
c) **(1.5 ptos)** Resolver mediante la fórmula de Simpson 1/3 con h=0.25
d) **(0.5 pto)** Hallar el error para b) y c) y comente sus resultados
e) **(1.0 pto)** Desarrolle un script en MATLAB para resolver b,c,d.

Problema 3

El modelo matemático de un péndulo (Figura 1) es el siguiente:

$$\ddot{\theta}(t)+\frac{g}{L}sen(\theta(t))=0$$

Considerando que la bolilla es lanzada desde θ(0)=π/6 rad con una velocidad inicial de $\dot{\theta}(0)$=-4rad/s, g=9.81 m/s^2 y L=1 m. Se desea calcular lo siguiente:

a) **(3.0 ptos)** Determine la posición y velocidad angular en el primer segundo usando un paso de 0.5 segundo con el método de Euler progresivo.

b) **(2.0 ptos)** Desarrolle un script en **MATLAB** que determine la posición máxima usando un paso de 0.001 segundo con el método de Euler progresivo.

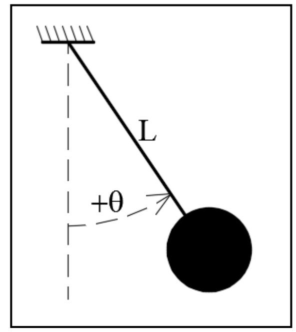

Figura 1: Péndulo simple

Problema 4

Consideremos el sistema mecánico que se muestra en la Figura 2, donde la masa del bloque $m=10$ kg, la constante del resorte $k=60$ N/m y **la** fuerza externa F(t)=3 N. La masa parte desde la posición de equilibrio y al cabo de 1 segundo está a 0.5m de su posición de equilibrio (a la izquierda).
El modelo de este sistema dinámico es representado por:

$$10\ddot{x}(t)+60x(t)=3; \qquad x(0)=0; \quad x(1)=-0.5$$

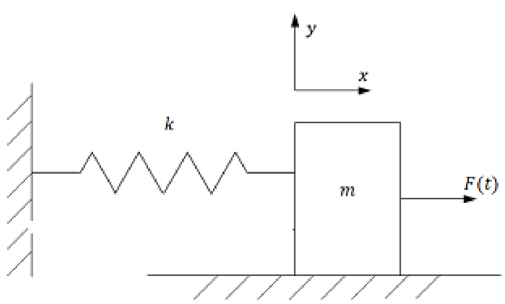

Figura 2: Sistema masa-resorte

a) (**1.5 ptos**) Obtenga las ecuaciones resultantes de aplicar el algoritmo de diferencias finitas (h=0.25) al modelo anterior.

b) (**1.5 ptos**) Resolver el sistema obtenido en a).

c) (**1.0 pto**) Evaluar el error relativo para x(0.5) si el valor exacto es -0.8345

d) (**1.0 pto**) Use los comandos de **MATLAB** a fin de obtener la solución analítica.

Los Profesores

Solución Problema 1

a)

$$\begin{array}{ccccccc}
i & t & y & & b_o & & b_1 \quad\quad b_2 \\
0 & 0 & 1.6667 & \dfrac{1.7905}{0.5} = 3.8510 & & \dfrac{-2.2709}{1} = -1.401 & \\
1 & 0.5 & 3.4572 & & & & \\
2 & 1 & 4.5472 & \dfrac{1.09}{0.5} = 2.18 & & &
\end{array}$$

$$p_2(t) = b_o + b_1(t-0) + b_2(t-0)(t-0.5)$$

b) $p_2(3) = 1.9022$

EL polinomio solo es interpolante, falla al extrapolar.

c.) Ajuste o regresión

cuando t→∞ L=5

t	0	0.5	1.0
y(t)	1.6667	3.4572	4.5472
v(t)=Ln(5/y(t)-1)	0.6928	-0.8069	-2.3068

Ec. de regresión:

$$v(t) = \ln\left(\frac{5}{y(t)} - 1\right) = \ln(a) - b * x(t) = c_1 + c_2 * t$$

Ecuación Normal : $A^T A c = A^T v$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6928 \\ -0.6928 \\ -2.3068 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1.5 \\ 1.5 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.4208 \\ -2.7102 \end{bmatrix}$$

$c_1 = 0.693 \qquad c_2 = -3.00$

$a = 2.00 \qquad b = 3.00$

d) $y(3)=\dfrac{5}{1+ae^{-3b}}$ =4.999

Con dos cifras significativas exactas 5.00

El método de regresión es mejor para realizar extrapolación.

e.) En Matlab;

```
t=[0 0.5 1];
y=[ 1.667 3.4572 4.5472];
yv=log(5./y-1);
c=polyfit(t,yv,1)
a=exp(c(2));
b=-c(1);
yaprox=5./(1+a*exp(-b*3)
```

Solución del Problema 2

a) Si $\boldsymbol{x=t^2}$ e $\boldsymbol{y=t^3}$

$$\alpha(t)=\left(t^2,t^3\right)$$
$$\alpha'(t)=\left(2t,3t^2\right)$$
$$S=\int_{-1}^{1}\|\alpha'(t)\|dt=\int_{-1}^{1}|t|\sqrt{4+9t^2}\,dt$$

b) t1= $-\sqrt{3/5}$ c1=5/9 t2=0 c2=8/9 t3= $\sqrt{3/5}$ c3=5/9

I=c1*f(t1)+ c2*f(t2) +c3*f(t3)= 2.6387

c) h=0.25

I=h/3*(f(-1)+4*f(-0.75)+2*f(-0.5)+4*f(-0.25)+2*f(0)+4*f(0.25)+2*f(0.5)+4*f(0.75)+f(1))

I= 2.8788

d) Ie=1/27*(26*sqrt(13)-16)=2.8794

E1= 0.2407 (Gauss)

E2 = 6.2839e-004 (Simpson 1/3)

El método de Simpson es más preciso que Gauss para este integrando

e)

```
clc
clear all
f=inline('abs(t).*sqrt(4+9*t.^2)')
% Gauss.m
Ie=1/27*(26*sqrt(13)-16)
c1=1, c2=1, x1=1/sqrt(3), x2=-x1
I1=c1*f(x1)+c2*f(x2)
err=abs(Ie-I1)
c1=5/9; c2=8/9; c3=c1;
x1=-sqrt(3/5),x2=0, x3=-x1;
I2=c1*f(x1)+c2*f(x2)+c3*f(x3)
```

```
err=abs(Ie-I2)
% Simpson 1/3
h=0.25
t=-1:0.25:1
y=f(t)
c=[1 4 2 4 2 4 2 4 1]
I3=h/3*sum(c.*y)
err=abs(Ie-I3)
```

Solución del Problema 3

a) Llevándolo a la forma matricial

$$\Theta=\begin{bmatrix}\theta\\ \dot\theta\end{bmatrix}\quad \dot\Theta=\begin{bmatrix}\dot\theta\\ \ddot\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot\theta\\ -\frac{g}{L}\,sen(\theta)\end{bmatrix}\quad \dot\Theta=f(t,\Theta)$$

$$\Theta(0)=\begin{bmatrix}\pi/6\\ -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta(0)\\ \dot\theta(0)\end{bmatrix}$$

$$\dot\Theta=\begin{bmatrix}\dot\theta\\ -9.81sen(\theta)\end{bmatrix}$$

Aplicando la fórmula de Euler es:

$$\Theta(0.5)=\Theta(0)+h*f(t,\Theta)$$

$$\Theta(0.5)=\begin{bmatrix}\pi/6\\ -4\end{bmatrix}+0.5\begin{bmatrix}-4\\ -9.81sen(\pi/6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.4764\\ -6.4525\end{bmatrix}$$

$$\Theta(1)=\begin{bmatrix}-1.4764\\ -6.4525\end{bmatrix}+0.5\begin{bmatrix}-6.4525\\ -9.81sen(-1.4764)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4.7027\\ -1.5693\end{bmatrix}$$

Por lo tanto la posición angular será: -4.7027 rad con una velocidad angular de -1.5693 rad/s^2

b)

```
clc;
h=0.001;ti=0;tf=1e8;
g=9.81;
L=1;
T=[pi/6;-4];
tabla=[0 T'];
for t=ti+h:h:tf
    tet=T(1);tetp=T(2);
    T=T+h*[tetp; -g*sin(tet)/L];
    if tetp>0 break
    end
    tabla=[tabla;t T'];

end
disp(tabla)
fprintf('La posicion maxima es de %.4f\n',abs(tet))
```

Solución Problema 4

(a)

$$x''+6x=\frac{3}{10}; \qquad x(0)=0; \quad x(1)=-0.5$$

$$\frac{x_2-2x_1+x_0}{h^2}+6x_1=\frac{3}{10}$$

$$\frac{x_3-2x_2+x_1}{h^2}+6x_2=\frac{3}{10}$$

$$\frac{x_4-2x_3+x_2}{h^2}+6x_3=\frac{3}{10}$$

$$\begin{pmatrix} -2+6h^2 & 1 & 0 \\ 1 & -2+6h^2 & 1 \\ 0 & 1 & -2+6h^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{10}h^2 \\ \frac{3}{10}h^2 \\ \frac{3}{10}h^2+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} -\frac{13}{8} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{13}{8} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{160} \\ \frac{3}{160} \\ \frac{83}{160} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0.5571 \\ -0.8866 \\ -0.8648 \end{pmatrix}$$

(c)

Error Relativo= $\left|\frac{-0.8345-(-0.8866)}{-0.8345}\right|100\% =$ **6.2433**%

(d)

```
>> x = dsolve('D2x+6*x=3/10','x(0)=0','x(1)=-1/2','t')
>> tt=0:0.25:1, xx=subs(x,tt)
```