UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2014-3**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **04/02/2014**
DACIBAHCC

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536C)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO A4**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1

a) **(2.5 Pts)** Un sector circular de radio R y ángulo 2Θ, cuyo momento de inercia con respecto a un eje que divide al sector en dos partes iguales se puede calcular con la fórmula: $I = \frac{1}{4} r^4 \left(\theta - \frac{1}{2} sen(2\theta) \right)$

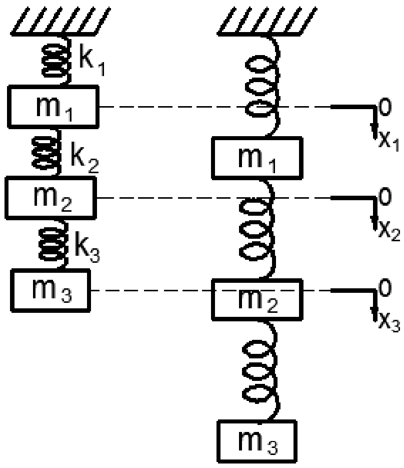
Si r=2 m y Θ=π/5. ¿Cuál debe ser el error relativo permisible en la medición de r y Θ Si el error máximo permitido para el cálculo de I es del 2 %, aplicando el principio de igual efecto.

b) **(2.5 Pts)** Sea un sistema basado en la norma IEEE-754 con las siguientes características: Almacenamiento de 16 bits: signo: 1 bit, exponente: 5 bits, mantisa : 10 bits, determine el valor binario y decimal de:

i) El mayor número positivo normalizado
ii) El menor positivo número subnormal
iii) El valor de I de la pregunta a) redondeado a 2 decimales

Problema 2

Se tiene el siguiente sistema masa-resorte. La relación entre las masas y los desplazamientos (x_i en cm) se da por el siguiente sistema de ecuaciones:



$$4x_1 - 1x_2 = 1$$
$$-2x_1 + 5x_2 - 1x_3 = 4$$
$$-2x_2 + x_3 = 3$$

Determine lo siguiente, indicando claramente los resultados parciales:

a) (**1 pto**) Verifique si el sistema tiene solución única.
b) (**2 pts**) Calcule con el método de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial.
c) (**2 pts**) Calcule con el método de Factorización de Doolitle.

Problema 3

Se considera el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ a \end{bmatrix}$$

a) **(2 Pts)** Calcular la matriz de la iteración de Gauss-Seidel y obtener su polinomio característico y a partir de él los valores propios. ¿Qué relación debe existir entre los coeficientes a y b para que el método de Gauss-Seidel sea convergente?
b) **(1.5 Pto)** Tomando ***a=2 y b=1***, calcular 5 iteraciones utilizando el método de Gauss-Seidel con un vector inicial igual al Cj y estime el error. Comente sus resultados acerca de la convergencia.
c) **(1.5 Pto)** Escriba una función en MATLAB para resolver b) con parámetros de entrada ***a***, ***b*** y el número de iteraciones ***n***, y parámetros de salida el vector solución ***x*** y el error ***err*** (use norma Infinita).

Problema 4

La estimación de la temperatura en un recinto frio se puede estimar por la siguiente expresión polinómica: $2x^3+4x^2-2x-5=0$, se sabe que el valor es cercano a 1 °C:

a) **(2 pts)** Determine 2 fórmulas para aplicar el método de punto fijo que sean convergente, verifique la condición de convergencia.
b) **(1 pts)** Determine la fórmula para aplicar el método de Newton-Rapshon
c) **(2 pto)** Estime la temperatura hasta la tercera iteración aplicando Newton-Raphson y estime el error.

Los Profesores

Solución 1

a)

$r = 2 \quad \xi_r = ??$

$\theta = \dfrac{\pi}{5} \quad \xi_\theta = ??$

$I = 0.6115$

$\xi_I = 0.02xI = 0.0122$

$$\xi_I = \left|\frac{\partial I}{\partial r}\right|\xi_r + \left|\frac{\partial I}{\partial \theta}\right|\xi_\theta$$

Por principio de igual efecto:

$$\frac{\xi_I}{2} = \left|\frac{\partial I}{\partial r}\right|\xi_r \quad \frac{0.0122}{2} = 1.2223\xi_r \quad \xi_r = 0.005(0.25\%)$$

$$\frac{\xi_I}{2} = \left|\frac{\partial I}{\partial \theta}\right|\xi_\theta \quad \frac{0.0122}{2} = 2.7639\xi_\theta \quad \xi_\theta = 0.0022(0.3519\%)$$

b)

i)

realmax=(-1)^(0)*(1.1111111111)*2^(11110-15)=(1+2^-1+2^-3+…+2^-10)*2^15

realmax=65504

binario=0 11110 1111111111

ii)

x=(-1)^0*(0.0000000001)*2^-14=2^-24

Decimal =5.9605e-008

Binario = 0 00000 0000000001

iii)

x=0.61

x=0.10011100001=(-1)^0*1.0011100001*2^{-1}

E-15=-1 E=14=01110

Binario = 1 01110 0011100001

Decimal = 0.6099

Solución 2

a) Matriz ampliada

4	-1	0	1
-2	5	-1	4
0	-2	1	3

Rango de A y de ampliada es de 3, por lo tanto tiene solución única.

b) f2=f2+f1/2

4.0000	-1.0000	0	1.0000
0	4.5000	-1.0000	4.5000
0	-2.0000	1.0000	3.0000

f3=f3+f2*2/4.5

4.0000	-1.0000	0	1.0000
0	4.5000	-1.0000	4.5000
0	0	0.5556	5.0000

Por sustitución regresiva

x3=9 x2=3 x1=1

c)

4	-1	0	1	0	0	d	e	f
-2	5	-1	a	1	0	0	g	h
0	-2	1	b	c	1	0	0	i

d=4 e=-1 f=0
a=-0.5
b=0
g=5-0.5=4.5
c=-2/4.5=0.444
h=5
i=0.5555

A			L			U		
4.0000	-1.0000	0	1.0000	0	0	4.0000	-1.0000	0
-2.0000	5.0000	-1.0000	-0.5000	1.0000	0	0	4.5000	-1.0000
0	-2.0000	1.0000	0	-0.4444	1.0000	0	0	0.5555

LUx=b, haciendo Lz=b y Ux=z
Por sustitucion progresiva=> z1=1 z2=4.5 z3=5
Por sustitucion regresiva=> x3=9 x2=3 x1=1

Solución 3

a)

$$T_G = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_G = \begin{bmatrix} 0 & -b/a & 0 \\ 0 & b^2/a^2 & -b/a \\ 0 & -b^3/a^3 & b^2/a^2 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(T_G - \lambda\, I) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 2b^2/a^2$$

$$\rho(T_G) = 2b^2/a^2 < 1$$

$$-1/\sqrt{2} \le b/a \le 1/\sqrt{2}$$

b)

$$T_G = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & -1/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$C_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

$$C_J = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = X^{(0)}$$

$$X^{(N+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & -1/8 & 1/4 \end{bmatrix} X^{(N)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

X1	X2	X3	ERR
0	0.5000	1.0000	------
-0.2500	0.1250	0.9375	0.3750
-0.0625	0.0625	0.9688	0.1875
-0.0313	0.0313	0.9844	0.0313
-0.0156	0.0156	0.9922	0.0156
-0.0078	0.0078	0.9961	0.0078

Se ha usado norma Infinita para el cálculo del error de sucesión, dado que el error decrece podemos afirmar que hay convergencia, además b/a esta en el rango de convergencia.

b) Función en MATLAB:

```
function  [x, err]=calcula(a, b, n)
A=[a b 0;b a b;0 b a];
B=[0; b; a];
D=diag(diag(A));
L=D-tril(A);
U=D-triu(A);
Tg=inv(D-L)*U;
Cg=inv(D-L)*B;
Cj=inv(D)*B;
x=Cj;
for i=1:n
    xn=Tg*x+Cg;
    err=norm(xn-x,Inf);
    x=xn;
end
```

Problema 4

Solución:

a)

despejando x^2 ➔ $x = \frac{\sqrt{2x+5-2x^3}}{2} = g_1(x)$

despejando x^3 ➔ $x = \sqrt[3]{\frac{5+2x-4x^2}{2}} = g_2(x)$

Verificando condición de convergencia:

$g_1'(1) = -0.4472$

$g_2'(1) = -0.7631$

Por lo qué:

$|g_1'(1)| < 1$

$|g_2'(1)| < 1$

Ambas serán convergentes

b) Aplicando la fórmula genérica, se tiene:

$x_0 = 1$

$$x_{N+1} = x_N - \frac{2x_N^{\ 3} + 4x_N^{\ 2} - 2x_N - 5}{6x_N^{\ 2} + 8x_N - 2}$$

c)

x	**Err**
1.000000000000000	NaN
1.083333333333333	0.083333333333333
1.078183046268153	0.005150287065181
1.078162587651530	0.000020458616623