UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2013-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 13/12/2013
DACIBAHCC

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Un objeto cae libremente desde lo más alto de un edificio de 313 m de altura, registrando los siguientes valores:

Tiempo (s)	1	3	5	8
Distancia recorrida (m)	5	44	122	313

Calcule lo siguiente, indicando claramente el procedimiento y sus resultados parciales:

a) **(2.0p)** Determine la distancia recorrida en el instante 7s usando el polinomio de interpolación de Lagrange de segundo grado.
b) **(2.0p)** Determine la distancia recorrida en el instante 6s usando spline cubico natural.
c) **(1.0p)** Usando el spline cúbico natural determine el módulo de la velocidad en el instante muy próximo a impactar con el suelo en m/s.

Problema 2

Sea la ecuación lineal de movimiento del vibrador de rotación:

$$\theta\,\ddot{\varphi} + c\,\varphi = 0$$

C.I.: $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\varphi}(0) = 0$

Donde: $\theta = 0.5 Kgm^2, c = 10\frac{N}{m}$. Determine el valor del ángulo de rotación $\varphi(0.1)$ y la velocidad $\dot{\varphi}(0.1)$, usando un paso de integración h=0.1 , con los siguientes métodos:

a) **(1.0p)** Euler
b) **(1.0p)** Método de Taylor 2
c) **(1.0p)** Runge Kutta 2

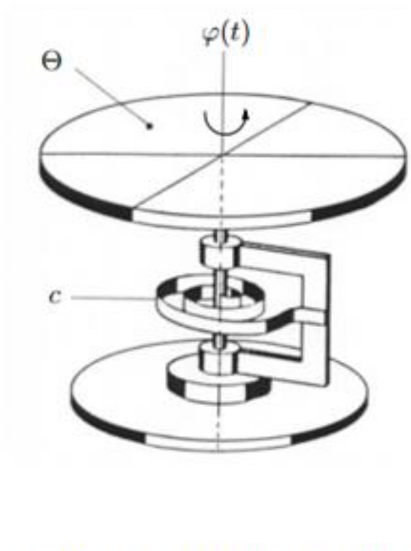

Fig. 1 Montaje Experimental para la determinación del momento de inercia de un cilindro

Se conoce la solución Analítica:

$$\varphi(t) = C_1\cos(2\sqrt{5}t) + C_2\sin(2\sqrt{5}t)$$

$$\dot{\varphi}(t) = C_2(2\sqrt{5})\cos(2\sqrt{5}t) - C_1(2\sqrt{5})\sin(2\sqrt{5}t)$$

d) **(0.5p)** Determine el error del ángulo de rotación cometido en cada caso.
e) **(1.5p)** Elabore la función en MATLAB que aplica el algoritmo de Euler para sistemas de EDOS de primer orden, asumiendo que se conoce la función F del lado derecho de la EDO.

AYUDA:

Convierta la EDO de segundo Orden en un sistema de EDOs de primer orden, haciendo cambio de variables (variables de estado).

Para Taylor de orden 2: $dF/dt=F_t + J_F*F$, siendo F el vector del lado derecho del sistema de EDOs de primer orden , J_F la matriz Jacobiana con respecto a la variables de estado. F_t es el vector derivada con respecto a t.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2013-2**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **13/12/2013**
DACIBAHCC

Problema 3

Evaluar la siguiente integral: $E = \int_2^6 \frac{\cos^2 x}{x} dx$

a) **(1.0p)** Aplicando la fórmula del trapecio (n=8)
b) **(1.0p)** Aplicando la regla de Simpson 1/3 (n=8)
c) **(1.0p)** Aplicando la cuadratura de Gauss Legendre (n=4)
d) **(2.0p)** Sabiendo que aplicando la cuadratura de Gauss Legendre (n=6) se obtiene E con un error menor a 10^{-5}. Haga un cuadro comparativo de los errores calculados en los ítems a, b y c y dé su apreciación crítica (conclusiones) al respecto.

TABLA DE GAUSS LEGENDRE

N	Xi	Ci
4	-0.861136311594053	0.347854845137454
	-0.339981043584856	0.652145154862546
	+0.339981043584856	0.652145154862546
	+0.861136311594053	0.347854845137454
6	-0.932469514203152	0.171324492379170
	-0.661209386466265	0.360761573048139
	-0.238619186083197	0.467913934572691
	+0.238619186083197	0.467913934572691
	+0.661209386466265	0.360761573048139
	+0.932469514203152	0.171324492379170

Problema 4

El potencial electrostático entre dos esferas concéntricas se puede representar por la ecuación de segundo orden: $y'' = -\frac{2}{x} y'$

Si se supone que el radio de la esfera interior es 1 y su potencial es 10, mientras que el radio de la esfera exterior es 2 y su potencial es 0, entonces las condiciones de frontera son

$y(1) = 10; \qquad y(2) = 0$

a.) **(2.0p)** Aproximar el valor del potencial y para $x = 1.5$ usando cualquiera de los métodos discutidos en clase. Considere h=0.25.
b.) **(1.0p)** Si la solución exacta es $y(x) = \frac{20}{x} - 10$, determinar el error exacto cometido en la aproximación de a).
c.) **(2.0p)** Implementar una función en MATLAB que dadas las pendientes iniciales s0 y s1 con soluciones aproximadas uN0, uN1. Calcule la pendiente mejorada s2 y el valor de uN2

```
function [s2,uN2]=disparo(f,a,b,alpha,beta,s0,s1,uN0,uN1,h)
% f: nombre del archivo .m donde se define el sistema
% a, b: extremos del intervalo
% s0, s1: pendientes iniciales
% alpha, beta: valores extremos
% h:  tamaño de paso
```

Los Profesores

Solución Problema 1

Parte a)

i	xi	yi	dLi	yi/dLi
0	3	44	10	4.4
1	5	122	-6	-20.3333333
2	8	313	15	20.8666667

Por lo tanto el polinomio de interpolación de lagrange es:
P(x)=4.4(x-5)(x-8)-20.333(x-3)(x-8)+20.8667(x-3)(x-5)
P(7)= 239m

Parte b)
Preparando la tabla de valores

i	x	y	hi	y[xi,xi+1]
0	1	5	2	19.5
1	3	44	2	39
2	5	122	3	63.6666667
3	8	313		

Ordenando para resolver el sistema de ecuaciones para hallar las M
Considerando spline cubico natural M0 y M3 =0

H

8	2
2	10

M

M1
M2

Y

117
148

Resolviendo

M0	0
M1	11.5
M2	12.5
M3	0

PSi=ai(x-xi)^3+bi(x-xi)^2+ci(x-xi)+di

	a	b	c	d
p0	0.95833333	0	15.6666667	5
p1	0.08333333	5.75	27.1666667	44
p2	-0.6944444	6.25	51.1666667	122

P2(6)= 178.722m

Parte c)
a) Derivando el polinomio P2 y evaluando en 8
P2’(8)= 69.917 m/s

Solución Problema 2

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = -\dfrac{c}{\theta}\varphi \\ \varphi(0) = \dfrac{\pi}{2} \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow z_1 = \varphi \;,\; z_2 = \dot{\varphi} \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 & z_1(0) = \dfrac{\pi}{2} \\ \dot{z}_2 = -\dfrac{c}{\theta} z_1 = -20 z_1 & z_2(0) = 0 \end{cases}$$

a) Algoritmo de Euler:

$$\begin{bmatrix} z_1^{(i+1)} \\ z_2^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^{(i)} \\ z_2^{(i)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} z_2^{(i)} \\ -20 z_1^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ -10\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ -\pi \end{bmatrix}$$

b) Algoritmo de Taylor 2

$$\begin{bmatrix} z_1^{(i+1)} \\ z_2^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^{(i)} \\ z_2^{(i)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} z_2^{(i)} \\ -20 z_1^{(i)} \end{bmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2^{(i1)} \\ -20 z_1^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1^{(i+1)} \\ z_2^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^{(i)} \\ z_2^{(i)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} z_2^{(i)} \\ -20 z_1^{(i)} \end{bmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{bmatrix} -20 z_1^{(i1)} \\ -20 z_2^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ -\pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.05\pi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45\pi \\ -\pi \end{bmatrix}$$

c) Algoritmo de Runge Kutta 2

$$K1 = h \begin{bmatrix} z_2^{(i)} \\ -20 z_1^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \qquad K2 = h \begin{bmatrix} z_2^{(i)} + \Delta z_2 \\ -20 z_1^{(i)} + \Delta z_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1^{(i+1)} \\ z_2^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^{(i)} \\ z_2^{(i)} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[K1] + \frac{1}{2}[K2]$$

$$K1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\pi \end{bmatrix} \qquad K2 = h \begin{bmatrix} 0 - \pi \\ -10\pi + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1\pi \\ -\pi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -\pi \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -0.1\pi \\ -\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45\pi \\ -\pi \end{bmatrix}$$

d)

	| valor exacto	-	valor aproximado |	= error
Euler :	1.4163	-	1.5708	=0.1545
Taylor 2:	1.4163	-	1.4137	=0.0026
Runge Kutta 2:	1.4163	-	1.5708	=0.0026

e)

```
function [t,H]=eulers(F,a,b,n,y0)
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;
H=[a y0'];
for i=1:n
    y=y0+=h*F(t(i),y0);
    H=[H; t(i+1) y'];
    y0=y;
end
```

Solución Problema 3

a) Aplicando la fórmula del trapecio (n=8) : E = 0.589098

b) Aplicando la regla de Simpson 1/3 (n=8): E = 0.595557

c) Aplicando Gauss- Legendre (n=4) : E = 0.596795

d) Aplicando Gauss- Legendre (n=6) : E = 0.594909

Luego:

Errores cometidos:

Aplicando la fórmula del trapecio (n=8) : error1 = 0.00581

Aplicando la regla de Simpson 1/3 (n=8): error2 = 0.00064

Aplicando Gauss- Legendre (n=4) : error3 = 0.00188

De lo calculado:

error1 > error 3 > error 2

Conclusiones: ………………….(personalizadas)

Solución problema 4

$$y''=-\frac{2}{x}y',\quad r\in[1,2].$$

$$y(1)=10;\quad y'(2)=0$$

$$Para\ i=1,2,3\qquad \left\{\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}=-\frac{2}{x_i}\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right.$$

$$\frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}=-\frac{2}{x_1}\frac{y_2-y_0}{2h}$$

$$\frac{y_3-2y_2+y_1}{h^2}=-\frac{2}{x_2}\frac{y_3-y_1}{2h}$$

$$\frac{y_4-2y_3+y_2}{h^2}=-\frac{2}{x_3}\frac{y_4-y_2}{2h}$$

Donde:

$$y_0=10\quad y_4=0\quad x_1=1.25\quad x_2=1.5\quad x_3=1.75$$

Resolviendo:

$$y_1=6\quad y_2=10/3\quad y_3=10/7$$

(b)

La solución aproximada para x=1.5:

$$y(1.5)\approx 10/3$$

Valor Exacto= 10/3

Error= 0

c)

```
function [s2,uN2]=dispalin2(f,a,b,alpha,beta,s0,s1,uN0,uN1,h)
%f:nombre del archivo .m donde se define el sistema
%a,b:extremos del intervalo
%s0,s1: pendientes iniciales
%alpha,beta: valores extremos
%h tamaño de paso
s2=s0+(s1-s0)*(beta-uN0)/(uN1-uN0);
Y=ode45(f,[a:h:b],[alpha s2]);
uN2=Y(end,2);
```