UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA P.A. 2013-1
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA 17/05/2013
DACIBAHCC

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Mediante ensayos se ha determinado la siguiente fórmula para estimar la ubicación de una partícula que se desplaza sobre una línea: $x(t)=\dfrac{A\,sen(B)\cos(t)}{\sqrt{17}}$

Considerando A=35 $\pm$ 0.1%, B=18 con precisión de 0.5, t = 15 $\pm$ 0.1% (ángulos en radianes) y truncando a 2 decimales para $\sqrt{17}$.

a) **(0.5 pto)** Calcule el valor estimado de la posición
b) **(3 ptos)** Estime el error debido a la propagación en la función.
c) **(1.5 ptos)** Desarrolle un script en MATLAB que permita determinar la cantidad de cifras significativas exactas que tiene el valor estimado en a)

Problema 2

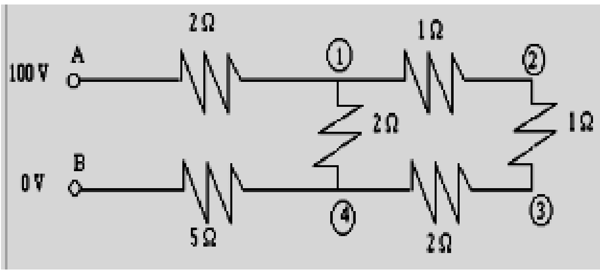


Fig. a Circuito Eléctrico

Sea el circuito eléctrico, mostrado en la Fig. a:
La corriente en el nodo p hacia el nodo q en una red hidroeléctrica está dada por: $I_{pq}=\dfrac{V_p-V_q}{R_{pq}}$, I en Amperios y R en Ohms, donde V_p y V_q son los Voltajes en los nodos en p y q, respectivamente, y R_{pq} es la resistencia en el tramo pq. La suma de las corrientes que llegan a cada nodo es nula; asimismo, las ecuaciones que relacionan a los voltajes pueden ser obtenidas.

En el nodo 1, se tiene la ecuación $I_{A1}+I_{21}+I_{41}=0$ o sea, $\dfrac{100-V_1}{2}+\dfrac{V_2-V_1}{1}+\dfrac{V_4-V_1}{2}=0$, o

$-4V_1+2V_2+V_4=-100$

Se pide:

a) **(1 pto)** Obtenga las ecuaciones en los nodos 2, 3 y 4.
b) **(1 pto)** Realice el método de eliminación Gaussiana indicando la primera parte de triangulación del sistema
c) **(1 pto)** Continúe con el método desarrollando la sustitución inversa.
d) **(1 pto)** Considere el nuevo circuito mostrado en la Fig. b, realice la factorización de Crout y resuelva el sistema lineal.

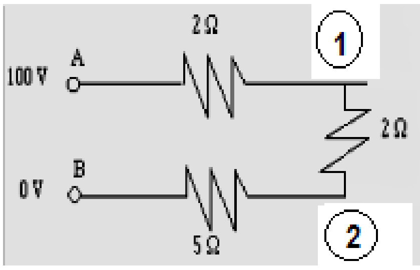


Fig. b Nuevo Circuito

e) **(1 pto)** Hacer la función en MATLAB que permita el pivoteo parcial. Debe tener en cuenta como parámetros de entrada: la matriz AA=[A b]que falta modificar en la eliminación gaussiana, la posición actual (i), el orden del sistema (n), y de salida: la matriz AB=[A b] con filas intercambiadas y la posición pivotal (después del intercambio de filas) para continuar el proceso de eliminación.
function [AB,p]=pivoteo(AA,i,n)

Problema 3

Se tiene una viga flexible y horizontal empotrada en un extremo A y libre en el otro extremo B. Si consideramos que tiene tres grados de libertad traslacionales $u_1, u_2, u_3,$ donde u_i se localiza a $i/4$ de la distancia de A a B. Si se aplica una carga unitaria en u_2, el vector $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, satisface el sistema

$$Ku = r,$$

Donde la matriz de rigidez K y el vector de cargar r, vienen dadas por

$$K = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} 0 \\ EI \\ 0 \end{pmatrix}$$

La constante EI depende del material de la viga y de su geometría. Suponiendo que $EI = 1$.

a) **(1 Pto)** Analizar la convergencia del método de Jacobi al aproximar u.

b) **(1 Pto)** ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente sobre los elementos de la matriz K para que el método de Gauss-Seidel Converja?

c) **(1.5 Ptos)** Aproximar u utilizando el método de Jacobi. Realice 03 iteraciones. Considere $u^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

d) **(1.5 Ptos)** Implementar un script en MatLab que permita calcular $\dfrac{\rho(T_j)}{\rho(T_{GS})}$.

$\rho(T_j)$: Radio espectral de la matriz de iteración de Jacobi.

$\rho(T_{GS})$: Radio espectral de la matriz de iteración de Gauss Seidel.

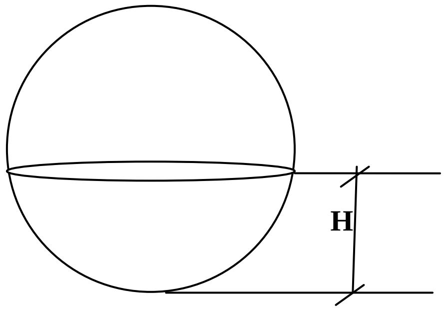
Problema 4

Se tiene un tanque esférico de radio R = 12 m. y cuyo volumen de agua almacenado es: V = 60 m^3.

a) **(2 Ptos)** Hallar la altura del líquido H y el error cometido usando el método de Newton-Raphson, realizando 3 iteraciones. Se sabe que la altura se encuentra alrededor del valor Ho = 1

b) **(1 Pto)** ¿Cuantas iteraciones como mínimo se deberán realizar utilizando el método de la Bisección tomando el intervalo [0.5, 1.5] para obtener el mismo error cometido en el ítem anterior?.

c) (**2 Ptos**) Si el item a) lo hubiese realizado con un programa de MATLAB pero con una precisión de 1e-8. ¿Cómo sería el programa?



SUGERENCIA: V = π (R – H/3). H^2

Los Profesores

Solucion 1

Solución:

a) Evaluando la fórmula dada, se 4.8466

b) Hallando las derivadas parciales, considerando r= $\sqrt{17}$

$$\left|\frac{\partial x}{\partial A}\right| = \left|\frac{sen(B).cos\,(t)}{r}\right| = 0.1385$$

$$\left|\frac{\partial x}{\partial B}\right| = \left|\frac{Acos(B).cos\,(t)}{r}\right| = 4.2615$$

$$\left|\frac{\partial x}{\partial t}\right| = \left|\frac{-Asen(B).sin\,(t)}{r}\right| = 4.1487$$

$$\left|\frac{\partial x}{\partial r}\right| = \left|\frac{-Asen(B).cos\,(t)}{r^2}\right| = 1.1764$$

$$\text{Error}=\left|\frac{\partial x}{\partial A}\right| eA + \left|\frac{\partial x}{\partial B}\right| eB + \left|\frac{\partial x}{\partial t}\right| et + \left|\frac{\partial x}{\partial r}\right| er = 2.2037$$

c)

```
A=35; eA=0.001*A;
B=18; eB=0.5;
t=15; et=0.001*t;
r=4.12;er=0.5*10^-2;
x=A*sin(B)*cos(t)/r

dA=abs(sin(B)*cos(t)/r)
dB=abs(A*cos(B)*cos(t)/r)
dt=abs(-A*sin(B)*sin(t)/r)
dr=abs(-A*sin(B)*cos(t)/(r^2))
ex=dA*eA+dB*eB+dt*et+dr*er
er=ex/x
n=0; %Cantidad de cifras decimales significtivas exactas
while  er<=5*10^-n
   n=n+1;
end
n=n-1;
fprintf('La cantidad de cifras siginificativas es %d\n',n);
```

Solución 2

a)
$$\frac{100-V_1}{2}+\frac{V_2-V_1}{1}+\frac{V_4-V_1}{2}=0$$
$$\frac{V_1-V_2}{1}+\frac{V_3-V_2}{1}=0$$
$$\frac{V_2-V_3}{1}+\frac{V_4-V_3}{2}=0$$
$$\frac{V_1-V_4}{2}+\frac{0-V_4}{5}+\frac{V_3-V_4}{2}=0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & -5 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

A =

Lik =	4	-2	0	-1	100
-1/4	-1	2	-1	0	0
0	0	-2	3	-1	0
-5/4	-5	0	-5	12	0

A =

	4	-2	0	-1	100
Lik =	0	3/2	-1	-1/4	25
-4/3	0	-2	3	-1	0
-5/3	0	-5/2	-5	43/4	125

A =

	4	-2	0	-1	100
Lik =	0	3/2	-1	-1/4	25
	0	0	5/3	-4/3	100/3
-4	0	0	-20/3	31/3	500/3

A =

4	-2	0	-1	100
0	3/2	-1	-1/4	25
0	0	5/3	-4/3	100/3
0	0	0	5	300

c) $$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -1 \\ & 3/2 & -1 & -1/4 \\ & & 5/3 & -4/3 \\ & & & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 25 \\ 100/3 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Sustitución inversa:

$$V_4 = 300/5 = 60$$

$$V_3 = \frac{(100/3 + 4/3V_4)}{5/3} = 68$$

$$V_2 = \frac{(25 + V_3 + 1/4V_4)}{3/2} = 72$$

$$V_1 = \frac{(100 + 2V_2 + V_4)}{4} = 76$$

d)

$$\frac{100 - V_1}{2} + \frac{V_2 - V_1}{1} = 0$$

$$\frac{0 - V_2}{5} + \frac{V_1 - V_2}{2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 9/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 9/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 500/9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 500/9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77.77 \\ 55.55 \end{bmatrix}$$

e)

```
function [AB, p]= pivoteo(AA,i,n)

[v,p]=max(abs(AA(i:n,i)));
p=p+i-1;
if p~=i,
            AA([p i],:)=AA([i  p],:);

end
 AB=AA;
```

Solución 3

Solución:

a. La matriz K es estrictamente diagonalmente dominante por lo tanto se asegura la convergencia al aplicar el método de Jacobi.
b. Que el radio espectral de la matriz de iteración de Gauss Seidel sea menor que 1

$$\begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & 0 \\ 4/9 & 0 & 4/9 \\ 0 & 4/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \\ u_3^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iteración	u1	u2	u3
0	0	0	0
1	0	1/9	0
2	4/45	1/9	4/45
3	4/45	77/405	4745

c)

```
clc
format rat
K=[5 -4 0;-4 9 -4;0 -4 5]
r=[0;1;0]
x0=[0;0;0]
D=diag(diag(K))
L=-tril(K,-1)
U=-triu(K,1)
Tj=inv(D)*(L+U)
Tgs=inv(D-L)*U
rhoj=max(abs(eig(Tj)))
rhogs=max(abs(eig(Tgs)))
R=rhoj/rhogs
```

SOLUCIÓN 4

a)

$$x_0 = 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{180}{\pi} - 36 x_n^{\ 2} + x_n^{\ 3}}{-72 x_n + 3 x_n^{\ 2}}$$

	Hn	error
1ra iteración:	1.323127239320034	0.323127239320034
2da iteración:	1.285223539932188	0.037903699387846
3ra iteración:	1.284697481787758	0.000526058144430

Luego **raiz = 1.284697481787758 ; error = 0.000526058144430**

b) $$n \geq \frac{\ln \dfrac{b-a}{e_n}}{\ln 2}$$ De donde: $$n \geq \frac{\ln \dfrac{1.5-0.5}{0.000526058144430}}{\ln 2}$$

$$n \geq \frac{\ln \dfrac{1.5-0.5}{0.000526058144430}}{\ln 2}$$ =10.892**.** **Rta: n= 11 iteraciones**

c)

```
f=inline('180/pi-36*(x^2)+(x^3)')
df=inline('-72*x+3*(x^2)')
x=1
acum=[];
for i=1:100
xn=x-f(x)/df(x);
err=abs(xn-x);
acum=[acum; xn err];
x=xn;
if err<1e-8
break
end
end
disp(acum)
```