UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA P.A. 2012-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA 14/12/2011
DACIBAHCC

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

a. (1.5p) Sea $f(x) = 1/x$. Demuestre que: $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} x_i^{-1}$

b. (1.5p) Considerando los siguientes puntos:

x	1	2	c
y	a	b	31

Hallar a,b y c positivos, de tal manera que cuando se realice una aproximación a un polinomio de grado mínimo, el error en cada punto sea 0 y todos los coeficientes de dicho polinomio sean 1.

c. (2p) Realice el programa en Matlab que realice los siguiente:
- Permita ingresar los vectores de x e y desde el teclado.
- Formar el polinomio usando el método matricial.
- Interpolar usando un vector más refinado xi formado por los valores extremos de los datos pero con 100 puntos igualmente espaciados.
- Graficar los datos con icono ‘ro’ y la datos interpolados con icono ‘b- -‘.

Problema 2

Considerando que la fuerza que necesita vencer el motor de un móvil que se desplaza sobre un ambiente de condiciones variables es:
$F(x) = 20sen(x)$ y el trabajo realizado es $W = \int_1^4 F(x)dx$ (Todas las unidades en SI, no realice ninguna conversión)

a) (2 ptos) Calcule el mínimo número de intervalos para que el error absoluto sea inferior a 1.5, usando el método del trapecio.
b) (2 ptos) Calcule W y el error, usando la cuadratura de Gauss-Legendre usando 3 puntos.
c) (1 pto) Desarrolle una rutina en matlab que permita determinar el ítem a), para un error máximo variable

Problema 3

a) (2 puntos) Utilizar el método de Runge-Kutta(RK-4), encontrar una aproximación de la solución en $x = 0.4$ en la ecuación diferencial

$$y' = \frac{1}{x+y} \qquad , \qquad y(0) = 2$$

Realizar los cálculos con cuatro decimales redondeados y un valor de $h = 0.2$

b) (1 punto) Asuma que se tiene definido el archivo M cuya declaración inicial es

```
function [x,y] = RK4(f,a,b,n,y0)
```

Escriba los comandos necesarios para solucionar el inciso (a) desde la ventana de comandos de Matlab®

c) (2 puntos)Dada la ecuación diferencial $y' = e^{-y}$ y la solución inicial $y(0) = 0$. Utilizar el método de Taylor de tres términos para calcular $y(0.5)$, trabaje con $h = 0.5$ y cuatro decimales redondeados en los cálculos.

Problema 4

Una partícula de masa "***m***" se mueve en línea recta a lo largo del eje "***x***" sometida a una fuerza elástica ***–kx*** y a una fuerza de rozamiento viscosa de la forma $-2\beta\,\dot{x}$. Si inicialmente la posición es $\boldsymbol{x=x_0}$ y al cabo de $\boldsymbol{t_f}$ segundos la posición es $\boldsymbol{x=x_f}$.

a) (0.5 Pts) Demostrar que la ecuación del movimiento viene dada por:
$$m\,\ddot{x} + k\,x + 2\beta\,\dot{x} = 0 \quad x(0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f$$

b) (1.0 Pto) Si el movimiento es sobreamortiguado y viene dado por la relación:
$$x = e^{-\frac{\beta}{m}*t}\left(A*e^{t*\sqrt{\left(\frac{\beta}{m}\right)^2-\left(\frac{k}{m}\right)}} + B*e^{-t*\sqrt{\left(\frac{\beta}{m}\right)^2-\left(\frac{k}{m}\right)}}\right)$$
Determine A y B para β=4, k=2 y m=2, si en el instante inicial la partícula parte de x=0 y al cabo de 0.5 seg. la partícula se encuentra en la posición x=1 m.

c) (2 Pts) Plantear las ecuaciones en diferencias finitas para aproximar x(1/8), x(1/4) y x(3/8).

d) (1.5 Pts) Resolver las ecuaciones obtenidas en c) y evalúe el error absoluto para cada caso.

Los Profesores

Solución 1

Solución

a.

i	x	y		
0	x_0	$\frac{1}{x_0}$	$\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_0}}{x_1-x_0}=\frac{-1}{x_0x_1}$	
1	x_1	$\frac{1}{x_1}$		$\frac{-1}{x_2x_1}+\frac{1}{x_0x_1}=\frac{x_1(x_2-x_0)}{x_2x_1^2x_0(x_2-x_0)}=\frac{1}{x_2x_1x_0}=(-1)^2\prod_{i=o}^{2}x_i^{-1}$
2	x_2	$\frac{1}{x_2}$	$\frac{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{-1}{x_2x_1}$	

b.
$y = 1+x+x^2$
Reemplazando

a = 1+1+1=3

b = 1+2+4=7

$31=1+c+c^2$ => (c-5)(c+6)=0   c=5 , -6

Los positivos son: (a,b,c)=(3,7,5)

c.
Programa en Matlab

```
x=input(' x= ');
y=input 'y=');
M=Vander(x);
C=M\y'
xi=linspace(x(1),x(end);
yi=polyval(C',xi);
plot(x,y,'or',xi,yi,'b—')
```

Solución 2

a) La integral exacta es: -20*cos(x)

Iexacta=23.8789

Aplicando el método del trapecio:

Cant Intervalos=1   Iaprox=2.5404
Cant Intervalos=2   Iaprox=19.2242
Cant Intervalos=3   Iaprox=21.8550
Cant Intervalos=4   Iaprox=22.7490 error =1.1300

Por lo tanto la respuesta es 4

b) Usando el polinomio de Legendre

xlegendre	c	Xi(ab)	f(xi)
-0.7745966692	0.5555555555	1.3381	19.4610
0.0	0.8888888888	2.5000	11.9694
+0.7745966692	0.5555555555	3.6619	-9.9429

Aplicando $\frac{(b-a)}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$

I= 23.8910 error=0.0121

```
c)
f=inline('20*sin(x)');
fi=inline('-20*cos(x)');
ie=fi(b)-fi(a);
errormax=1.5;
error=errormax+1;
n=1;
while error>errormax
      a=1;b=3;
      h=(b-a)/n;
      coef=2*ones(n+1,1);
      coef(1)=1;coef(end)=1;
      x=a:h:b; y=f(x);
      I=y*coef*h/2;
      error=abs(I-ie);
      n=n+1;
end
fprintf('La respuesta es %d\n',n-1)
```

Solución 3

Realizando los cálculos con cuatro lugares decimales:
Calculando las constantes k_1, k_2 , k_3 , k_4 para la primera iteración.

$$k_1 = \frac{0.2}{2} = 0.1$$
$$k_2 = \frac{0.2}{0+0.1+2+0.05} = 0.0930$$
$$k_3 = \frac{0.2}{0+0.1+2+0.0465} = 0.0932$$
$$k_4 = \frac{0.2}{0+0.2+2+0.0932} = 0.0872$$

Luego
$$y_1 = y(0.2) = 2 + \frac{1}{6}(0.1 + 2 * 0.0930 + 2 * 0.0932 + 0.0872) = 2.0933$$

De donde
$x_1 = 0.2$ $\quad$ $y_1 = 2.0933$

Los valores de las constantes para la segunda iteración son:

$$k_1 = \frac{0.2}{0.2+2.0933} = 0.0872$$
$$k_2 = \frac{0.2}{0.2+0.1+2.0933+0.0436} = 0.0821$$
$$k_3 = \frac{0.2}{0.2+0.1+2.0933+0.0411} = 0.0822$$
$$k_4 = \frac{0.2}{0.2+0.2+2.0933+0.0822} = 0.0777$$

Luego
$y_2 = y(0.4) = 2.0933 + \frac{1}{6}(0.0872 + 2 * 0.0821 + 2 * 0.0822 + 0.0777) = 2.1756$

De donde
$x_2 = 0.4$ $\quad y_2 = 2.1756$

b)

```
>> f = inline('1/(x+y)','x','y')
>> [x,y]=RK4(f,0,0.4,2,2)
```

c)

$y'' = -e^{-y}y' = -e^{-2y}$

Sustituyendo, resulta la siguiente expresión iterativa.

$$y_{n+1} = y_n + 0.1e^{-y_n} - 0.005e^{-2y_n}$$

Proceso iterativo: (Realizando los cálculos con cuatro lugares decimales)

Para $x_0 = 0, \quad y_0 = 0$
$y_1 = y(0.1) = 0 + 0.1e^0 - 0.005e^0 = 0.095$

Para $x_1 = 0.1, y_1 = 0.095$
$y_2 = y(0.2) = 0.095 + 0.1e^{0.095} - 0.005e^{-0.19} = 0.1818$

Para $x_2 = 0.2, y_2 = 0.1818$
$y_3 = y(0.3) = 0.1818 + 0.1e^{-0.1818} - 0.005e^{-0.3636} = 0.2617$

Para $x_3 = 0.3, y_3 = 0.2617$
$y_4 = y(0.4) = 0.2617 + 0.1e^{-0.2617} - 0.005e^{-0.5234} = 0.3357$

Para $x_4 = 0.4, y_4 = 0.3357$
$y_5 = y(0.5) = 0.3357 + 0.1e^{-0.3357} - 0.005e^{-0.6714} = 0.4046$

De donde el valor aproximado es $y(0.5) = 0.4046$

Solución 4

a) Aplicando la segunda ley de Newton:

$\sum F = m\,a$

$m\,\ddot{x} = -K\,x - 2\beta\,\dot{x}$

$m\,\ddot{x} + K\,x + 2\beta\,\dot{x} = 0 \quad x(0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f$

b) Reemplazando las condiciones de frontera: ***x=0, t=0 y x=1, t=0.5***

$$x = A\,e^{(\sqrt{3}-2)t} + B\,e^{(-\sqrt{3}-2)t}$$

A=1.38913, B=-1.38913

c) Discretizando: (0,0); (1/8,x_1); (1/4,x_2); (3/8,x_3); (1/2, 1)

Luego de reemplazar valores la ecuación diferencial de segundo orden será:

$$\ddot{x} + 4\,\dot{x} + x = 0 \quad x(0) = 0 \quad x(1/2) = 1$$

$$\ddot{x}_i + 4\,\dot{x}_i + x_i = 0$$

Reemplazando para ***i=1, 2, 3***

$$\left(\frac{x_2 - 2x_1 + x_0}{h^2}\right) + 4\left(\frac{x_2 - x_0}{2h}\right) + x_1 = 0$$

$$\left(\frac{x_3 - 2x_2 + x_1}{h^2}\right) + 4\left(\frac{x_3 - x_1}{2h}\right) + x_2 = 0$$

$$\left(\frac{x_4 - 2x_3 + x_2}{h^2}\right) + 4\left(\frac{x_4 - x_2}{2h}\right) + x_3 = 0$$

$$h = 1/8 \quad x_0 = 0 \quad x_4 = 1$$

d) Resolviendo se tiene:

t	xexacto	xfinitas	err
0	0	0	0
0.1250	0.4721	0.4958	0.0237
0.2500	0.7527	0.7809	0.0282
0.3750	0.9136	0.9324	0.0188
0.5000	1.0000	1.0000	0.0000