UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2011-2**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **23/12/2011**
DACIBAHCC

EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO A4 Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Luis y Victor son dos jóvenes ingenieros UNI que gustan de invertir en acciones de la Bolsa de Valores de Lima (BVL), entre ellos se entabla el siguiente diálogo:

Víctor: He comprado acciones de San Cristóbal, Buena Ventura y Backus
Luis: ¿Qué cantidad tienes de cada una de ellas?
Víctor: ¡Adivina!
Luis: Dime el valor total de tus acciones en tres días diferentes y te diré cuantas tienes de cada una de ellas.
Víctor: El martes 22 de Noviembre de 2011 a precio de cierre las acciones valían 13890, el 28 de Noviembre valían 13122 y el 5 de Diciembre 12128 soles.
Luis conoce la siguiente información:
El 22 de Noviembre el precio de San Cristóbal, Buena Ventura, y Backus era respectivamente 16.98, 9.0, 9.0; el 28 de Noviembre 15.90, 8.72, 8.52 y el 5 de Diciembre 14.08, 8.20, 8.76.
¿Qué cantidad de acciones de cada tipo tiene Víctor?

a) (1.0 pto) Plantee el sistema a solucionar.
b) (3.0 ptos) Resuelva por el método iterativo de Gauss-Seidel, comenzando con el vector inicial [450 280 280]. Presente las primeras cuatro iteraciones.
c) (1.0 pto) ¿Qué método es el que implementa el siguiente Script de MATLAB®?

```
function X = Pregunta(A,B,X0)
% DATOS:
% A es una matriz invertible de orden NxN
% B es una matriz de orden Nx1
% X0 es una matriz de orden Nx1: solucion inicial
% delta es la tolerancia para X0
% kmax es el número máximo de iteraciones
% Resultados
% X es una matriz de orden Nx1: La aproximacion a la solucion de AX = B
delta = 0.0001;
kmax = 100;
N = length(B);
for k = 1: kmax
    for j = 1:N
        X(j)=(B(j)-A(j,[1:j-1,j+1:N])*X0([1:j-1,j+1:N]))/A(j,j);
    end
    err=abs(norm(X'-X0));
    relerr=err/(norm(X)+eps);
    X0 = X';
    if (err<delta)|(relerr<delta)
        break
    end
end
X = X'
```

Solución:

a)
Asignando literales a las acciones que tiene Víctor:
S la cantidad de acciones de San Cristóbal
B la cantidad de acciones de Buena Ventura
K la cantidad de acciones de Backus

Estableciendo las relaciones algebraicas entre las literales:
Martes 22 de Noviembre de 2011, las acciones valían: 16.98S, 9B y 9K y juntas tenían un valor de 13890, por tanto se tiene

$$16.98S + 9B + 9K = 13890$$

El 28 de Noviembre:

$$15.90S + 8.72B + 8.52K = 13122$$

5 de Diciembre:

$$14.08S + 8.20B + 8.76K = 12128$$

Luis sabrá el número de acciones que tiene Víctor resolviendo el sistema:

$$\begin{gathered} 16.98S + 9B + 9K = 13890 \\ 15.90S + 8.72B + 8.52K = 13122 \\ 14.08S + 8.20B + 8.76K = 12128 \end{gathered}$$

b)
Aplicando el método de Gauss-Seidel, con el vector inicial [450 280 280] en la cuarta iteración se tiene:

Primera iteración: $X^{(1)} = [521.2014 \ \ 280.8827 \ \ 283.8180]'$
Segunda iteración: $X^{(2)} = [518.7099 \ \ 281.6954 \ \ 287.0620]'$
Tercera iteración: $X^{(3)} = [516.5597 \ \ 282.4464 \ \ 289.8149]'$
Cuarta iteración: $X^{(4)} = [514.7025 \ \ 283.1431 \ \ 292.1480]'$

Finalmente:
S = 514.7025 ≅ 514 acciones de San Cristóbal
B = 283.1431 ≅ 283 acciones de Buena Ventura
K = 292.1480 ≅ 292 acciones de Backus

c)
El Script implementa el método iterativo de Jacobi

Problema 2

El coeficiente de fricción usado para calcular la caída de presión de un fluido en una tubería de un sistema, está dado por: $\mathrm{F(f)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{f}}} + 2\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{123} + \frac{1}{1792\sqrt{\mathrm{f}}}\right) = 0$

a) (2.5 ptos) Para el método del punto fijo, haciendo $\mathrm{G(f)} = \mathrm{F(f)} + \mathrm{f}$, determine si la expresión converge alrededor del punto f = 0.02
b) (2.5 ptos) Utilizando el método de Newton Rapshon, determine f, partiendo desde 0.02, encuentre la respuesta con 4 decimales exactos e indique cuantas iteraciones necesita.

Solucionario:

a) Derivando la expresión:

$$G(f)=\frac{1}{\sqrt{f}}+2Ln\left(\frac{1}{123}+\frac{1}{1792\sqrt{f}}\right)+f$$

$$G'(f)=-\frac{0.5}{\sqrt{f^3}}-\left(\frac{0.0005580}{\sqrt{f^3}\left(\frac{1}{123}+\frac{1}{1792\sqrt{f}}\right)}\right)+1$$

Se verifica que para los valores alrededor alrededor de |G'(f)| es mayor a 1, por lo tanto no converge.

b) Haciendo la expresión f=f-F(f)/F'(f)

$$F'(f)=-\frac{0.5}{\sqrt{f^3}}-\left(\frac{0.0005580}{\sqrt{f^3}\left(\frac{1}{123}+\frac{1}{1792\sqrt{f}}\right)}\right)$$

Las Iteramos de los valores de f son:

1) 0.01088

2) 0.01292

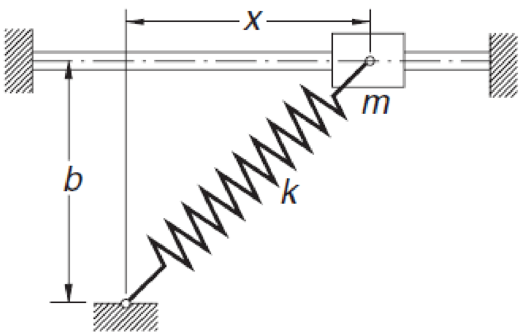
3) 0.01324

4) 0.01325

Problema 3

Una masa ***m*** está unida a un resorte de longitud libre ***b*** y rigidez ***k***. El coeficiente de fricción entre la masa y la barra horizontal es ***μ***. La aceleración de la masa se puede demostrar que es $\ddot{x}=-f(x)$, donde:

$$f(x)=\mu g+\frac{k}{m}(\mu b+x)\left(1-\frac{b}{\sqrt{b^2+x^2}}\right)$$



Si la masa es liberada del reposo en ***x=b***, su velocidad en ***x=0*** está dado por:

$$v_0=\sqrt{2\int_0^b f(x)dx}$$

Calcule $\boldsymbol{v_0}$ por integración numérica usando la data ***m=0.8 kg***, ***b=0.4 m***, μ=0.3, ***k=80 N/m*** y ***g=9.81 m/s²***.

a) (1.5 ptos) Resuelva por Simpson 1/3 con h = 0.1.

b) (1.5 ptos) Resuelva por cuadratura Gaussiana n = 3.

c) (1.0 pto) Determine el error y comente sus resultados, dado el valor exacto $\boldsymbol{v_0}$***=2.4977 m/s.***

d) (1.0 pto) Escriba un programa en MATLAB para este problema.

Solución:

a) $$f(x) = 0.3(9.81) + \frac{80}{0.8}(0.3(0.4) + x)\left(1 - \frac{0.4}{\sqrt{0.4^2 + x^2}}\right)$$

$$h = 0.1$$

$$Ia = \frac{h}{3}(f(0) + 4 * f(0.1) + 2 * f(0.2) + 4 * f(0.3) + f(0.4))$$

$$Ia = 3.1177$$

$$v_{0a} = \sqrt{2 * Ia} = 2.4971$$

b) Haciendo el cambio de limites a [-1, 1]

$$x = 0.2t + 0.2$$

$$dx = 0.2 * dt$$

$$F(t) = 0.2(9.81) + 0.2\frac{80}{0.8}(0.3(0.4) + 0.2t + 0.2)\left(1 - \frac{0.4}{\sqrt{0.4^2 + (0.2t + 0.2)^2}}\right)$$

$$Ib = 0.555555555555556 * \mathrm{F}(-0.774596669241483) + 0.888888888888889 * \mathrm{F}(0) +$$
$$+ 0.555555555555556 * \mathrm{F}(-0.774596669241483)$$

$$Ib = 3.1191$$

$$v_{ob} = 2.4976$$

c) Para la solución a) el error es de 0.0006 y para la solución b) es de 0.0001, por lo tanto en este caso la cuadratura de Gauss es más exacta.

d) Programa en MATLAB:

```
% susti20112.m
f=inline('0.3*9.81+80/0.8*(0.3*0.4+x).*(1-0.4./sqrt(0.4^2+x.^2))')
I=quad(f,0,0.4,1e-10)
v=sqrt(2*I)
h=0.1
I1=h/3*(f(0)+4*f(0.1)+2*f(0.2)+4*f(0.3)+f(0.4))
v1=sqrt(2*I1)
err1=abs(v-v1)
% x=0.2*t+0.2
ff=inline('0.2*0.3*9.81+0.2*80/0.8*(0.3*0.4+0.2*t+0.2).*(1-
0.4./sqrt(0.4^2+(0.2*t+0.2).^2))')
t1=-0.774596669241483
t2=0.0
t3=+0.774596669241483
c1=0.555555555555556
c2=0.888888888888889
c3=0.555555555555556
I2=c1*ff(t1)+c2*ff(t2)+c3*ff(t3)
v2=sqrt(2*I2)
err2=abs(v-v2)
```

Problema 4

Sea el problema de valor frontera $u'' = 2u' - u + te^t - t$

Con condiciones de contorno u (0)= 0 y $u(1) = \frac{e}{2} - 3$ .Use h=0.25.

Se pide:

a) (1.5 ptos) Resuelva el problema usando el método de las diferencias finitas.

b) (2.5 ptos) Si las pendientes iniciales son $\alpha = -1.6$ y $\beta = -0.8$ obteniendo soluciones aproximadas con el método de Euler de u(1, α)= -3.0936 y u(1, β)= -1.5311 respectivamente. Calcule la pendiente mejorada δ y el valor de u(1, δ) .

c) (1.0 pto) Compare el porcentaje de error que se cometería si se conoce que la solución es:

X	0	0.25	0.5	0.75	1
U	0	-0.2136	-0.5421	-1.0134	-1.6409

Solución

a)Diferencias finitas

$20u_{i-1} - 31u_i + 12u_{i+1} = t_i\exp(t_i) - t_i$

B=-1.6409

$$\begin{bmatrix} -31 & 12 & 0 \\ 20 & -31 & 12 \\ 0 & 20 & -31 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}e^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} - 12*B \end{bmatrix}$$

u=[0 **-0.2098** **-0.5360** **-1.0080** -1.6409]

b) Método del Disparo

$\alpha = -1.6$ y $\beta = -0.8$

u(1, α)= -3.0936 y u(1, β)= -1.5311

B=-1.6409

δ=-0.8-(1.6-0.8)*(-1.5311-B)/(3.0936-1.5311)= -0.8562

t	u	u'
0	0	-0.8562=δ
0.2500	-0.2140	-1.2843
0.5000	-0.5351	-1.8552
0.7500	-0.9989	-2.5679
1.0000	$\boxed{-1.6409}$	-3.3927

u(1,δ)

c)

x	0	0.25	0.5	0.75	1
u	0	-0.2136	-0.5421	-1.0134	-1.6409
udsip	0	-0.2140	-0.5351	-0.9989	-1.6409
% error	--	0.2%	1.3%	1.4%	----
udiff	0	**-0.2098**	**-0.5360**	**-1.0080**	-1.6409
%error	-----	1.8%	1.13%	0.53%	-----

Los Profesores