UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2011-1
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 20/11/2011
DACIBAHCC

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1

Dada la matriz de orden n, $A = (a_{ij})$, donde

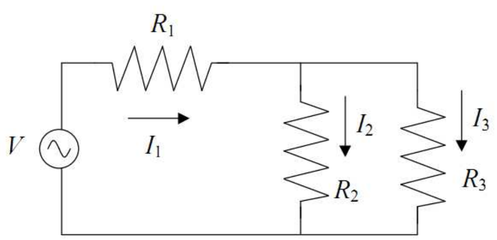
$$a_{ij} = \begin{cases} i(n - j + 2 * i) & si\ i \leq j \\ a_{ji} & si\ i > j \end{cases} \qquad i, j = 1,2, \dots, n$$

y la columna de términos independientes $b = (1,2, \dots n)^T$, para $n = 9$.

a) **(03 ptos)** Escriba una función o un script en Matlab que resuelva el sistema exclusivamente haciendo uso del operador \. Debe imprimirse la matriz A, el vector b, el número de condición de A, y la solución.
b) **(01 pto)** Si se desea aplicar la iteración de Jacobi con Matlab. ¿Con que comandos construye las matrices que intervienen? Asuma que A ya existe en el espacio de trabajo.
c) **(01 pto)** Para (b) ¿Cuál es el algoritmo de iteración, dada la estimación inicial x^0 elegida arbitrariamente?

Problema 2

Con el siguiente circuito se forma un sistema de ecuaciones lineales.



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{pmatrix}$$

Considerando V= 220v, R1=110Ω, R2=220 Ω y R3=1000 Ω.

a) **(02 ptos)** Resuelva el sistema de ecuaciones por eliminación Gaussiana con pivoteo total.
b) (**02 ptos**) Factorice la matriz de coeficientes usando el método de Doolitle.
c) (**01 pto**) Mediante la factorización anterior, encuentre la solución del sistema.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2011-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **20/11/2011**
DACIBAHCC

Problema 3

Sea el sistema lineal de la forma Ax=b, donde las matrices son:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se pide:

a) **(01pto)** Investigue los valores de $\boldsymbol{\beta}$ para los cuales el método de Jacobi converge.
La Matriz de Gauss Seidel, para la forma $\boldsymbol{x}^{(i+1)} = \boldsymbol{\mathcal{F}x}^{(i)} + \boldsymbol{h}$, es:

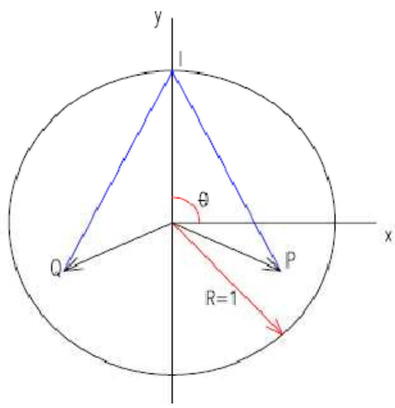
$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/(2\beta) \end{bmatrix}$$

b) **(01pto)** Si $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{3/4}$, ¿el método de Gauss Seidel convergerá?. Justifique.

c) **(02ptos)** Si b.1) es afirmativa, realice tres iteraciones con el método de Gauss Seidel con $x^{(0)} = [2.5 \quad 3 \quad 16/3]^T$. Comente su respuesta.

d) **(01pto)** Determine el error usando la <u>norma infinita</u> del residuo en la tercera iteración: $\boldsymbol{r}^{(3)} = \|\boldsymbol{Ax}^{(3)} - \boldsymbol{b}\|$, Comente el numero de cifras decimales exactas obtenidas en esta iteración.

Problema 4



Para jugar al billar en una mesa circular hemos de golpear la bola Q de la figura adjunta con la bola P, tras un impacto I en la banda. Conocido el radio R de la mesa y las posiciones en coordenadas cartesianas (cuyo origen es el centro de coordenadas) de los puntos P y Q son (x_P, y_P) y (x_Q, y_Q) respectivamente, el punto de impacto viene definido por el ángulo central θ.
Tras un análisis geométrico del problema, se prueba que los valores de θ que proporcionan los puntos de impacto posible son los ceros de la función:

$$f(\theta) = \frac{x_P \sin(\theta) - y_P \cos\theta}{\sqrt{(R\cos\theta - x_P)^2 + (R\sin\theta - y_P)^2}} + \frac{x_Q \sin(\theta) - y_Q \cos\theta}{\sqrt{(R\cos\theta - x_Q)^2 + (R\sin\theta - y_Q)^2}}$$

Si consideramos un billar de radio unidad, $P = (0.6, 0)$ y $Q = (-0.6, 0)$.

a) **(02ptos)** Empezar con el método de la Bisección para aproximar el punto de impacto I, con un intervalo inicial de $\theta \in [1,2]$, realice 03 iteraciones. Muestre el error.

b) **(01pto)** ¿Cuántas iteraciones serán necesarias para tener una precisión de 10^{-4}? No realice iteraciones.

c) **(02ptos)** Realice 02 iteraciones utilizando el método de Newton. Considere $\theta_0 = 1$.

Los Profesores

Solucionario

SOLUCION 1

(a)

```
function [sol] = pregEP_2011_1()
% solucion pregunta examen parcial 2011_1
n = 9;
for i = 1:n
   for j = 1:n
      if i <= j
         A(i,j) = i*(n - j + 2*i);
      else
         A(i,j) = A(j,i);
      end
   end
end
A  % Imprimir A
b = (1:n)'  % imprimir vector columna b
condA = cond(A) % imprimir el numero de condicion de A
sol = A\b;   % vector solución
```

(b)

```
M = diag(diag(A));
N = M - A;
```

(c)

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{b}$$

Solución 2

a) Preparando la matriz ampliada es:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 110 & 220 & 0 & 220 \\ 0 & 220 & -1000 & 0 \end{bmatrix}$$

Reubicando el pivote

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1000 & 220 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 110 & 220 \\ 0 & 0 & 1.61 & 1.22 \end{bmatrix}$$

Realizando sustitución inversa:
Se tiene:
X=[0.1366 0.6211 0.7578]
Debido al cambio de columna de la 1 x 3
La respuesta correcta de la inicial es:
X=[0.7578 0.6211 0.1366]

b) Aplicando el algoritmo de Doolitle

Descomponemos A:

A=LxU $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 110 & 1 & 0 \\ 0 & 0.66667 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 330 & 110 \\ 0 & 0 & -1073.33333 \end{bmatrix}$

c) Por sustitución progresiva obtenemos

Lz=b $z = \begin{bmatrix} 0 \\ 220 \\ -145.44667 \end{bmatrix}$

Por sustitución regresiva es:

z=Ux $x = \begin{bmatrix} 0.7570 \\ 0.6215 \\ 0.1355 \end{bmatrix}$

Solución 3

a) **Por diagonal dominante en A:** $|\beta| > 1 \quad \Rightarrow \quad \beta > 1 \ o\, \beta < -1$

Tj = $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1/2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1/\beta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Usando radio espectral $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{T_j}) = \left|\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\beta}}}\right| < 1 \quad \beta > \frac{1}{2}$

b.1) $\mathcal{F} = Tgs = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/(2\beta) \end{bmatrix}$

Usando radio espectral $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{T_{gs}})=\left|\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\beta}}\right| < 1 \quad \beta > \frac{1}{2} \quad\quad y \quad \beta < -\frac{1}{2}$

Por lo tanto converge para cualquier valor inicial arbitrario.

b.2) Algoritmo de Gauss – Seidel

$$x^{(i+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} x^{(i)} + \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Iteraciones con valor inicial $x^{(0)} = D^{-1}b$

i	x_1	x_2	x_3
0	**2.5**	**3.0**	**5.333**
1	**-0.1667**	**3.1667**	**5.5556**
2	**-0.2778**	**3.2778**	**5.7037**
3	**-0.3519**	**3.3519**	**5.8025**

$\Downarrow$ -0.5 $\quad$ $\Downarrow$ 3.5 $\quad$ $\Downarrow$ 6

El método converge pero es muy lento. $\rho(T_{gs})$**=0.667**< 1

3)Error = residuo =0.0988 (ninguna cifra decimal en la tercera iteración)

Solución 4

(a)

Hemos de golpear la bola Q de coordenadas (-0.6,0) con la bola P=(0.6,0), tras un impacto I en la banda. Sabe que los ceros de la función:

$$f(\theta)=\frac{0.6\sin(\theta)}{\sqrt{(\cos\theta-0.6)^2+\sin^2\theta}}+\frac{-0.6\sin(\theta)}{\sqrt{(\cos\theta+0.6)^2+\sin^2\theta}}$$

nos proporciona la posición del punto de impacto:

a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	error
1.0000	2.0000	1.5000	0.2422	-0.1880	0.0321	1.0000
1.5000	2.0000	1.7500	0.0321	-0.1880	-0.0809	0.5000
1.5000	1.7500	1.6250	0.0321	-0.0809	-0.0246	0.2500

(b)

$$\frac{b-a}{2^n}<Tol \quad \Rightarrow \frac{1}{2^n}<10^{-4} \quad n>\mathbf{13.2877} \quad \therefore \mathbf{n=14}$$

(c)

$$f'(\theta)=\frac{0.6\cos(\theta)}{\sqrt{(\cos\theta-0.6)^2+\sin^2\theta}}+$$

$$\frac{0.6\sin(\theta)}{\left(\sqrt{(\cos\theta-0.6)^2+\sin^2\theta}\right)^3}\times(-1/2)\big(\big(2(\cos\theta-0.6)(-\sin\theta)\big)+2\sin\theta\cos\theta\big)$$

$$\frac{-0.6\cos(\theta)}{\sqrt{(\cos\theta+0.6)^2+\sin^2\theta}}+$$

$$\frac{-0.6\sin(\theta)}{\left(\sqrt{(\cos\theta+0.6)^2+\sin^2\theta}\right)^3}\times(-1/2)\big(\big(2(\cos\theta+0.6)(-\sin\theta)\big)+2\sin\theta\cos\theta)\big)$$

k	$X^{(k)}$	$f(X^{(k)})$	$f'(X^{(k)})$
0	1	0.2422	-0.3586
1	1.6754	-0.0474	-0.4513
2	**1.5704**		