UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2009-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 23/10/2009
DACIBAHCC

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1
Sea el sistema tridiagonal:

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & -\alpha\beta \\ 0 & -1 & \beta+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Para que valores de α y β el sistema es compatible indeterminado, es decir, presenta infinitas soluciones. (**1.5 Ptos**)

b) Obtener la factorización LU de Crout. (**1.5 Ptos**)

c) Resolver el sistema usando las sustituciones directa e inversa respectivamente, a partir de la factorización resultante en b). (**1.5 Ptos**)

d) Escriba una función en MATLAB para determinar si una matriz es cuadrada y tridiagonal. Utilice la siguiente cabecera:

function OK=tridiag(A)
% OK=1 : Si A es una matriz cuadrada y además tridiagonal
% OK=0 : En caso contrario (**2 Ptos**)

Problema 2
Considerando el siguiente sistema:

$$74x_1+23x_2=43$$
$$23x_1+94x_2=26$$

a) Verifique la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss Seidel. (**1.5 Ptos**)
b) Calcule la solución aproximada en la tercera iteración usando el Método de Gauss Seidel, partiendo del vector nulo. (**2.5 Ptos**)
c) Calcule el error cometido en la parte b), considere norma infinito. (**1 Pto**)
d) Sea $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$, halle el espectro de ***A*** y sus vectores propios. (**1.5 Ptos**)

Problema 3
La velocidad de ascenso (***v***) de un cohete saliendo de la superficie terrestre se puede aproximar por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}.\ln\left(\frac{\boldsymbol{M}_0}{\boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{c}.\boldsymbol{t}}\right) + \boldsymbol{g}.\boldsymbol{t}$$

En la cual:
u - velocidad de escape del cohete;
M_0 - masa del cohete a ser lanzado;
c - tasa de consumo de combustible;
g - aceleración gravitacional; y
t - tiempo (medido a partir del lanzamiento).

Considerando $\boldsymbol{u}$ = 200 m/s, $\boldsymbol{M_0}$ = 1600 Kg, $\boldsymbol{g}$ = 9.8 m/s^2 y $\boldsymbol{c}$ = 27 Kg/s, determinar el instante en que $\boldsymbol{v}$=100 m/s.

a) Empezar con el método de la Bisección para determinar una raíz aproximada para la ecuación, con intervalo inicial de tiempo [7, 8], realice tres iteraciones. Reporte un cuadro de los principales resultados incluyendo el error. (**2 Ptos**)

b) Usar la última iteración de Bisección para el intervalo inicial del método del punto fijo. ¿Es posible hallar una función iterativa G(t) que contenga la raíz de la ecuación en a)? Justifique. (**2 Ptos**)

c) Si su respuesta en b) es afirmativa realice cuatro iteraciones usando el algoritmo del punto fijo. Determine el error relativo en la última iteración. (**1 Pto**)

d) Realice una función en MATLAB del método de iteración del punto fijo que tenga como entrada: la dirección de la función ***G***, un valor inicial ***to***, y la precisión esperada ***TOL***. Y como salida una matriz ***H*** de iteraciones, con la primera columna: iteraciones y la segunda: valor de ***t***. (**2 Ptos**)

Los Profesores

P1 Solución

a) Realizando operaciones con la matriz ampliada:

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & \beta & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & -\alpha\beta & -\alpha \\ 0 & -1 & \beta+1 & 1 \end{array}\right\}$$

(f2-f1)➔f2

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\alpha\beta & -\alpha \\ 0 & -1 & \beta+1 & 1 \end{array}\right\}$$

(f3+(1/α)f2)➔f3

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\alpha\beta & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right\}$$

Sera compatible indeterminado cuando $\alpha = 0$

b) Obteniendo la factorización de Crout

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & -\alpha\beta \\ 0 & -1 & \beta+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Solución del sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por sustitución directa:

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 1 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por sustitución inversa:

$$x = \begin{bmatrix} \beta \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d)

```
function OK=tridiag(A)
[nf, nc]=size(A);
if nf==nc
  T=diag(diag(A))+diag(diag(A,-1),-1)+ diag(diag(A,1),1);
  If all(all(T-A))
      OK=1;
   else
       Ok=0;
   end
else
   OK=0;
end
```

P2 solución

a) Aplicando las formulas correspondientes
Rho(Jacobi)=0.2758
Rho(GS)=0.0760
b) X1=0.5361   X2=0.1454
c) 0.0032
d) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ➔ E={ 2 , 2}
vectores Propios $[0.5 \;\; 1.0]^t$ y $[1 \;\; 0]^t$.

P3 solución

a)

$$f(t) = 200\ln\left(\frac{1600}{1600-27t}\right) + 9.8t - 100 = 0$$

It	a	b	t	f(a)	f(t)
0	7	8	7.5	-6.2590	0.5637
1	7	7.5	7.25	-6.2590	-2.8499
2	7.25	7.5	7.375	-2.8499	-1.1437
3	7.375	7.5	7.4375		

b) a=7.3750 b=7.5

$$t = G(t) = \left(100 - 200\ln\left(\frac{1600}{1600-27t}\right)\right)/9.8$$

$$G'(t) = \frac{27000/49}{1600-27t}$$

$\xi = b$

K=G^{-1}(ξ)0.3981<1 por lo tanto converge

c) Iteraciones

0	7.4375
1	7.4671
2	7.4554
3	7.4600
4	7.4582

Solución exacta 7.45873811582382

d)
```
function [H]=iterapf(G,xo,tol)
   e=1; i=0;

   H=[0   xo];

   While e>tol

     x=G(x0);

     e=abs(x-x0);
```

```
  i=i+1;
 H=[ H; i, x];
  x0=x;
end
```