Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica
DACIBAHCC

P.A. 2009-2
18/12/09

EXAMEN FINAL METODOS NUMERICOS – MB536

Se permite el uso de una hoja de Formulario.

Problema 1

Un fabricante de bombas ha determinado que la curva característica Caudal-Altura de uno de sus modelos corresponde a la cuadrática:

$$H = -25.4846Q^2 + 47.6235Q + 27.2218$$

Se sabe que los datos empleados para ajustar por mínimos cuadrados dicha parábola fueron:

Q(m^3/s)	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
H(m)	27.11	p	46.34	46.60	q	46.28	r	30.81	22.08

a) **(3Pts)** Determine los valores p, q y r
b) **(1.5Ptos)** Determine el factor de regresión R^2 y comente sus resultados
c) **(2Ptos)** Escriba una función que permita obtener el vector de valores:
M = [M₀ M₁ M₂ …. Mₙ], donde $M_i = S''(x_i)$
para un spline cúbico natural a partir de la data x, y.
Cabecera de la función: function ***M=CalcMSpl(x, y)***

Problema 2

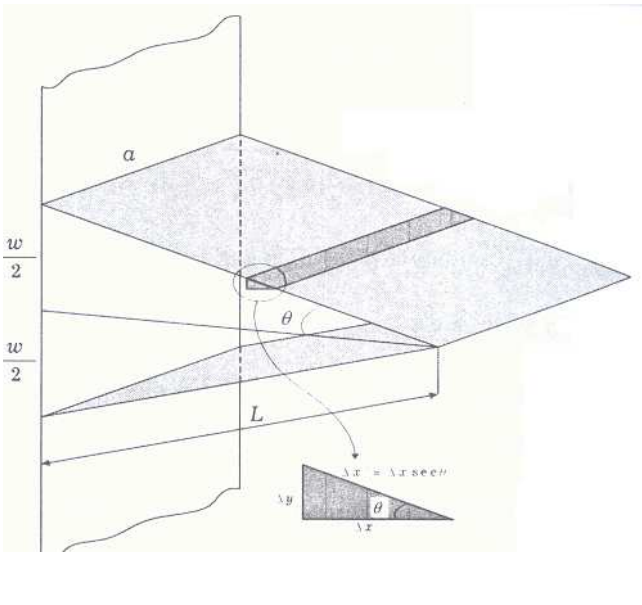
En el proceso de compresión isotérmica del aire de un pistón desde 0.08 m^3 hasta 0.02m^3, se cumple que el trabajo realizado es: $W = RmT\int \frac{dV}{V}$

Donde R=0.287 kJ/(kgK), T=300 K m=0.1kg.
a) (3Ptos) Calcule el trabajo aproximado considerando la cuadratura de Gauss-Legendre con 2 puntos del intervalo.
b) (2Ptos) Encuentre el error cometido en la parte a y comente.
c) (1.5Ptos) Desarrolle una función que permita calcular las raíces del polinomio de Legendre de grado n, considerando que dicho polinomio se genera de la siguiente expresión:

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} x P_n - \frac{n}{n+1} P_{n-1},\ P_0 = 1,\ P_1 = x$$

Problema 3

En una aleta triangular que se muestra en la figura, encuentre el perfil de temperatura correspondiente para los siguientes datos:
h=20 W/m ^{2}K
k=100W/m K
Ta=200°C
L=0.5m
w=0.01m



La ecuación de transferencia de calor de una aleta triangular simplificada está dada por:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{1}{L-x}\right)\frac{dT}{dx} = \frac{2h}{kw}\frac{(T-Ta)}{\left(1+\frac{x}{L}\right)}$$

Con condiciones de Frontera:
$x = 0$, $T_0 = 200^{o}C$
$x = L$, $\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = 0$

Sugerencia: en la frontera cuando $x=L$ aplicar limite

$$\lim_{x\to L}\left\{\left(\frac{1}{L-x}\right)\frac{dT}{dx}\right\} = \frac{d^2T}{dx^2} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to L}\left\{\frac{2h}{kw}\frac{(T-Ta)}{\left(1+\frac{x}{L}\right)}\right\} = \frac{2Lh}{kw}\frac{dT}{dx}$$

Se pide:

a) (**0.5Ptos**) Realice la distribución de nodos (x_i) o incógnitas, si se desea usa Δx=0.125.
b) (**3Ptos**) Determine el sistema lineal usando las diferencias finitas.
c) (**2Ptos**) Resuelva el sistema lineal y grafique la distancia x vs T a mano alzada.
d) (**1.5Ptos**) Usando ode45 o Euler y la pendiente inicial s_0 como datos realice una función en Matlab que resolvería el problema de valor frontera con el método del disparo. Que tenga la siguiente cabecera:
function[x,T,s]=disparo(F,a,b,To,T_B,so,tol)
% F dirección de la función del lado derecho de la EDO
% a y b son los valores de x en la frontera
% To y so son los valores iniciales ($dT/dx|_{xo}=s_0$) y T_B= valor en la frontera
% tol : tolerancia $|T_B-Tsk| <tol$

Los Profesores

Solución
Problema 1
a)

$$\begin{bmatrix} \sum x^4 & \sum x^3 & \sum x^2 \\ \sum x^3 & \sum x^2 & \sum x \\ \sum x^2 & \sum x & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x^2 y \\ \sum xy \\ \sum y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.29 \\ 52.48 \\ 40.29 \end{bmatrix}$$

b)
R^2=0.97
El ajuste es aceptable
c)

```
function M=CalcMSpl(x, y)
n=length(x)
dh=x(2:n)-x(1:n-1)
yp=(y(2:n)-y(1:n-1))./dh
a=2*(dh(1:n-2)+dh(2:n-1))
b=dh(2:n-2)
TD=diag(a)+diag(b,1)+diag(b,-1)
VC=6*(yp(2:n-1)-yp(1:n-2))'
VS=TD\VC
M=[0 VS' 0]
```

Problema 2

a=0.02
b=0.08
Tomando de tablas las raíces
-0.577350269189626
+0.577350269189626
Y los coeficientes
1.0
1.0

Realizando el cambio de variable $t = \dfrac{(b-a)x + (a+b)}{2}$ y aplicando

$$\frac{(b-a)}{2} \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

Tenemos que el trabajo aproximado es 11.74 kJ
b)W=RmT(Ln(b)-Ln(a))=11.94
error=0.195
c) function [x]=pleg(n)

```
 pn_1=1;
 pn=[1 0];
 if n==0
    p=pn_1;
```

```
 elseif n==1
    p=pn;
 else
    for i=2:n
       p=((2*n+1)/(n+1))*conv([1 0],pn)-(n/(n+1))*pn_1;
       pn_1=pn;
       pn=p;
    end
 end
x=roots(p);
```

Problema 3

$\left. dT/dx \right|_{x_4} = 0$

	T(0)=200	T_1	T_2	T_3	T_4	T_f
Nodos:	•	•	•	•	•	•
	$x_0=0$	$x_1=0.125$	$x_2=0.25$	$x_3=0.375$	$x_4=0.5$	$x_f=$

$$\frac{T_{i-1}-2T_i+T_{i+1}}{\Delta x^2}+\left(\frac{1}{0.5-x_i}\right)\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{2\Delta x}=\frac{40}{100(0.01)}\frac{(T_i-20)}{(1+2x_i)}$$

$$T_{i-1}-2T_i+T_{i+1}+\left(\frac{\Delta x}{1-2x_i}\right)\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{1}=40(\Delta x)^2\frac{(T_i-20)}{(1+2x_i)}$$

$$T_{i-1}-2T_i+T_{i+1}+\underbrace{\left(\frac{\Delta x}{1-2x_i}\right)}_{A_i}\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{1}=\underbrace{\frac{40(\Delta x)^2}{(1+2x_i)}}_{B_i}T_i-\underbrace{\frac{800(\Delta x)^2}{(1+2x_i)}}_{C_i}$$

$$(1-A_i)T_{i-1}-(2+B_i)T_i+(1+A_i)T_{i+1}=-C_i \qquad \texttt{i=1,2,3}$$

$$\frac{T_{i-1}-2T_i+T_{i+1}}{\Delta x^2}-\frac{20L}{100(0.01)}\frac{(T_{i+1}-T_{i-1})}{2\Delta x}=0$$

$$T_{i-1}-2T_i+T_{i+1}-5(T_{i+1}-T_{i-1})=0$$

$$6T_{i-1}-2T_i-4T_{i+1}=0$$

$$6T_3-2T_4-4T_f=0$$

Por la condición frontera $T_4=T_f$

$$\begin{bmatrix}-(2+B_1) & (1+A_1) & 0 & 0\\ (1-A_2) & -(2+B_2) & (1+A_2) & 0\\ 0 & (1-A_3) & -(2+B_3) & (1+A_3)\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\T_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-C_1-(1-A_1)\\-C_2\\-C_3\\0\end{bmatrix}$$

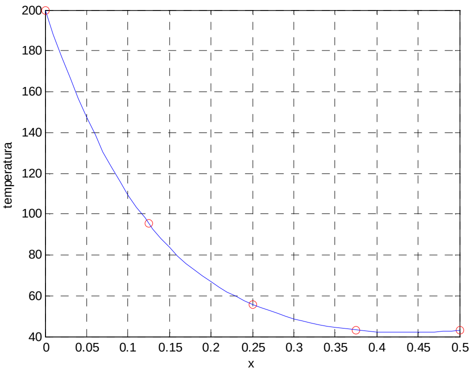
Aplicando valores

$$\begin{bmatrix} -2.625 & 1.1250 & 0 & 0 \\ 0.8333 & -2.5 & 1.1667 & 0 \\ 0 & 0.75 & -2.4167 & 1.25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_1 \\ \boldsymbol{T}_2 \\ \boldsymbol{T}_3 \\ \boldsymbol{T}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187.5 \\ -10 \\ -8.3333 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

Solución

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 95.3846 \\ 55.8974 \\ 43.0769 \\ 43.0769 \end{bmatrix}$$



d)

```
function [x,T,s]=disparo(F,a,b,To,T_B,so,tol)

[x,T]=od45(F,[a b],[To;so])
Tnso=T(:,1);
s1=so+(T_B-Tnso)/(b-a);
[x,T]=od45(F,[a b],[To;s1]) Tns1=T(:,1);

Tns1=T(:,1);
% secante
While e> tol
s= s1-( T_B –Tns1)(s1-so)/(Tn1-Tno);
[x,T]=od45(F,[a b],[To;s])
Tns=T(:,1);
e=abs(TB-Tns)
so=s1; Tnso=Tns1;
s1=s;   Tns1=Tns;
end
```