

**SOLUCIONARIO DEL EXAMEN SUSTITUTORIO
 DE CALCULO NUMERICO (MB535)**

- SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO
- ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS

Problema 1

Dada la matriz A y el vector columna b

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

- Resolver el sistema $Ax = b$ utilizando eliminación Gaussiana con pivoteo parcial para $n=1$.
- Hallar el condicionamiento de A para cualquier número natural n, utilizando la norma infinita.
- Utilizando el condicionamiento de la matriz A, estimar el error relativo que se puede cometer en la solución al resolver el sistema $Ax = \tilde{b} = (1, 2)^T$ con $n=100$.

Solución

(a)

$$x = (3, -1)^T$$

(b)

$$\text{cond}_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty}$$

$$\|A\|_{\infty} = \max\{1+2, 2+4+1/n^2\} = 6+1/n^2$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+4n^2 & -2n^2 \\ -2n^2 & n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A^{-1}\|_{\infty} = \max\{1+6n^2, 3n^2\} = 1+6n^2$$

$$\therefore \text{cond}_{\infty}(A) = (6+1/n^2)(1+6n^2) = 36n^2 + 12 + 1/n^2$$

(c)

Para $n=100$

$$\text{cond}_{\infty}(A) = 36 \cdot 10^4 + 12 + 10^{-4} = 350012.0001$$

$$\Delta b = (0 \quad 10^{-4})^T \Rightarrow \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \frac{1}{2n^2 - 1} = \frac{1}{19999}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}_{\infty}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 17.0015$$

Problema 2

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método de Newton-Raphson con Matlab, complete la parte faltante.

$$f_1(x, y, z) = x^4 - 10x + 5y - z + 3 = 0$$

$$f_2(x, y, z) = y^3 + \text{sen}(y) - 2x - 2z - 5 = 0$$

$$f_3(x, y, z) = x + y - 10z + 2\text{sen}(z) + 5 = 0$$

```
function [x, iter]= nrap(f, fp, x0, tol, imax)
if nargin<4
    tol=1.0e-4;
end
if nargin<5
    itermax=20;
end
x=x0;
normx=0;
normz=inf;
iter=0;
while (normz>tol*normx)&(iter<=imax)
    f0=feval(f,x);
    fp0=feval(fp,x);

    z=_____ ;
    normz=norm(z,2);
    normx=norm(x,2);
    x=x+z;
    iter=iter+1;
end
```

%Funcion del sistema

function G=fun(x)

G=[_____

_____];

%Jacobiano del sistema

function G=jfun(x)

G=[_____ _____

_____ _____

Orden en matlab

```
>>x=nrap('fun','jfun',[1 1 1]',10^-3,1000)
```

Solución

```
function [x, iter]= nrap(f, fp, x0, tol, imax)
if nargin<4
    tol=1.0e-4;
end
if nargin<5
    itermax=20;
end
x=x0;
normx=0;
normz=inf;
iter=0;
while (normz>tol*normx)&(iter<=imax)
    f0=feval(f,x);
    fp0=feval(fp,x);
    z=-fp0\f0;
    normz=norm(z,2);
    normx=norm(x,2);
    x=x+z;
    iter=iter+1;
end
```

```

%Función del sistema
function G=fun(x)
G=[x(1)^4-10*x(1)+5*x(2)-x(3)+3
x(2)^3+sin(x(2))-2*x(1)-2*x(3)-5
x(1)+x(2)-10*x(3)+2*sin(x(3))+5];

```

```

%Jacobiano del sistema
function G=jfun(x)
G=[(4*x(1)^3)-10  5  -1
-2  3*x(2)^2+cos(x(2))  -2
1  1  -10+2*cos(x(3))];

```

Problema 3

- a) Probar que si g interpola a f en los nodos x_0, x_1, \dots, x_{n-1} y h interpola a f en los nodos x_1, x_2, \dots, x_n , entonces, la función:

$$g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0} (g(x) - h(x))$$

Interpola a f en los nodos x_0, x_1, \dots, x_n (g y h no necesitan ser polinomios).

- b) Encontrar el polinomio de interpolación de Lagrange $g(x)$ en los nodos $\{x_0, x_1, x_2\}$ y el polinomio de interpolación de Lagrange en los nodos $\{x_1, x_2, x_3\}$ y aplicar el apartado anterior para obtener el polinomio de interpolación en los nodos $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ de una función $f(x)$ definida por la tabla siguiente:

$$x = -1, 0, 1, 2$$

$$f = 2, -1, 0, 5$$

- c) Encontrar el polinomio de interpolación de Lagrange para la tabla siguiente:

$$x = -1, 0, 1, 2, 3$$

$$f = 2, -1, 0, 5, 14$$

Comparar con el resultado obtenido en el apartado anterior y explicar el resultado.

Solución

- a) Basta comprobar que la nueva función

$$k(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0} (g(x) - h(x))$$

cumple las condiciones de interpolación, es decir, $k(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$

En efecto:

$$k(x_0) = g(x_0) + \frac{x_0 - x_0}{x_n - x_0} (g(x_0) - h(x_0)) = g(x_0) = f(x_0)$$

$$k(x_j) = g(x_j) + \frac{x_0 - x_j}{x_n - x_0} (g(x_j) - h(x_j)) = g(x_j) = f(x_j)$$

para $j = 1, 2, \dots, n - 1$

$$k(x_n) = g(x_n) + \frac{x_0 - x_n}{x_n - x_0} (g(x_n) - h(x_n)) = h(x_n) = f(x_n)$$

- b) La tabla de diferencias divididas es:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
-1	2	-3	2	0	0
0	-1	1	2	0	
1	0	5	2		
2	5	9			
3	14				

Por lo tanto,

$$g(x) = 2 - 3(x + 1) + 2(x + 1)x$$

$$h(x) = -1 + x + 2x(x - 1)$$

$$k(x) = g(x) + \frac{x - x_0}{x_n - x_0} (g(x_n) - h(x_0)) = -1 - x + 2x^2$$

c) Utilizando la tabla completa de diferencias divididas anterior resulta el mismo polinomio de grado 2. Tiene sentido, ya que el polinomio encontrado pasa por los puntos (2, 5) y (3, 14). Es decir, estos dos nodos no añaden ninguna información a la dada por los restantes nodos.

Problema 4

La distribución de temperaturas en una placa rectangular de 1m. x 0.9m. obedece a la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$xy \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (x + y) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 2x + y \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 0.9$$

Se sabe que en el borde exterior la temperatura obedece a la siguiente relación:

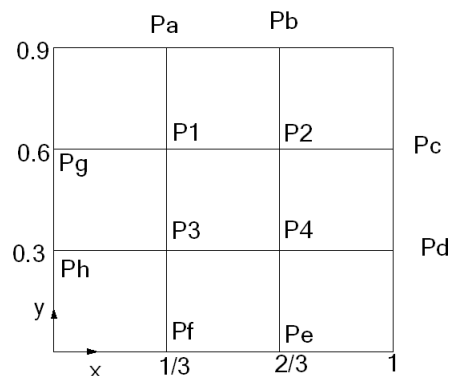
$$T(x, y) = x^2 + y^2$$

Se desea hallar la distribución interna de temperaturas.

- Realice la **discretización** usando una malla rectangular ($\Delta x = 1/3$, $\Delta y = 0.3$)
- Plantee el sistema de ecuaciones lineales usando el método de las diferencias finitas
- Resolver el sistema dado en b) usando eliminación de Gauss.

solucion

a)



Condiciones de Frontera:

$$P_a = (1/3)^2 + 0.9^2$$

$$P_b = (2/3)^2 + 0.9^2$$

$$P_c = (1)^2 + 0.6^2$$

$$P_d = (1)^2 + 0.3^2$$

$$P_e = (2/3)^2 + 0^2$$

$$P_f = (1/3)^2 + 0^2$$

$$P_g = (0)^2 + 0.6^2$$

$$P_h = (0)^2 + 0.3^2$$

b) Planteando las ecuaciones en diferencias finitas:

Nodo P1: $x=1/3$ $y=0.6$

$$\frac{1}{3}(0.6) \left(\frac{P_2 - 2P_1 + P_g}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{1}{3} + 0.6 \right) \left(\frac{P_a - 2P_1 + P_3}{\Delta y^2} \right) = 2 \left(\frac{1}{3} \right) + 0.6$$

Nodo P2 $x=2/3$ $y=0.6$

$$\frac{2}{3}(0.6) \left(\frac{P_c - 2P_2 + P_1}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{2}{3} + 0.6 \right) \left(\frac{P_b - 2P_2 + P_4}{\Delta y^2} \right) = 2 \left(\frac{2}{3} \right) + 0.6$$

Nodo P3 $x=1/3$ $y=0.3$

$$\frac{1}{3}(0.3) \left(\frac{P_4 - 2P_3 + P_h}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{1}{3} + 0.3 \right) \left(\frac{P_1 - 2P_3 + P_f}{\Delta y^2} \right) = 2 \left(\frac{1}{3} \right) + 0.3$$

Nodo P4 $x=2/3$ $y=0.3$

$$\frac{2}{3}(0.3) \left(\frac{P_d - 2P_4 + P_3}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{2}{3} + 0.3 \right) \left(\frac{P_2 - 2P_4 + P_e}{\Delta y^2} \right) = 2 \left(\frac{2}{3} \right) + 0.3$$

Los Profesores