

**CUARTA PRÁCTICA CALIFICADA
DE CALCULO NUMERICO (MB535)**

- DURACION: 60 MINUTOS
- SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO
- ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS

P1 (07 Puntos)

Sea la integral: $\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}} x dx$

a) Realice el cambio de variable $x=1/t$ y con $h=0.1$ resuelva mediante la siguiente fórmula de Newton-Cotes abierta:

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx \approx \frac{5h}{24}(11f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + 11f(x_4))$$

- b) La integral anterior se puede aproximar a $\int_1^b e^{-\sqrt{x}} x dx$, eligiendo un valor de b tal que el área a la derecha de b sea despreciable. Aplique el método del trapecio considerando $b=101$ y $h=5$.
- c) Comente sus resultados sabiendo que la integral exacta es $32e^{-1}$.

Solución

a)

Haciendo el cambio de variable $x=1/t$:

$$\int_0^1 e^{-\sqrt{1/t}} \frac{1}{t^3} dt = \int_0^1 f(t) dt$$

$$I = \frac{5 \times 0.1}{24}(11f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + 11f(0.4) + 11f(0.6) + f(0.7) + f(0.8) + 11f(0.9))$$

$$I = 11.2728$$

b)

$$\int_1^{101} e^{-\sqrt{x}} x dx = \int_1^{101} g(x) dx$$

$$I = \frac{5}{2}(g(1) + 2(g(6) + g(11) + \dots + g(96)) + g(101))$$

$$I = 11.3574$$

c)

$$I_e = 11.7721$$

Se observa que la aproximación del trapecio es ligeramente mejor.

P2 (06 Puntos)

Dada la siguiente información:

x	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
y	0,7039	0,6247	0,5410	0,4546	0,3675

Se desea evaluar la integral $I = \int_{1.4}^{2.2} f(x)dx$, usando el método de Romberg. Cuantos niveles de Romberg (columnas) serán necesarias para alcanzar la misma precisión de Simpson 1/3. Justifique.

Solución

Aplicando Simpson 1/3:

$$I = \int_{1.4}^{2.2} f(x)dx = h/3 * (f(1.4) + 4f(1.6) + 2f(1.8) + 4f(2.0) + f(2.2)) = \underline{0.431373333333333}$$

Aplicando la cuadratura de Romberg:

Rj,0	Rj,1	Rj,2
0.4286		
0.4307	0.431386666666667	
0.4312	<u>0.431373333333333</u>	0.431372444444444

P3 (07 Puntos)

Dada la ecuación $\frac{dy}{dx} = y + x$, con las condiciones iniciales $x_0=0$ y $y_0=1$.

a) (5 pts) Encuentre una expresión polinómica para hallar h, de tal manera que en un paso, se cumpla: $y_{1ep}=n$ y y_{1rk}

donde:

n: constante real.

y_{1ep} : y_1 usando euler progresivo

y_{1rk} : y_1 usando Runge - Kutta cuarto orden

b) (2 pts) Encuentre el valor de h con 2 decimales exactos para $n=2$, si el valor de h esta dentro del intervalo $[1,1$ y $1,3]$

Solución

a)

Aplicando método Euler

Reemplazando para $x_0=0$ y $y_0=1$:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i$$

$$y_{i+1} = y_i + h(y_i + x_i)$$

$$y_1 = y_0 + h(y_0 + x_0)$$

$$y_1 = 1 + h$$

Aplicando el método de Runge Kutta

Reemplazando para $x_0=0$ y $y_0=1$:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) = x_i + y_i = 1$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) = x_i + \frac{h}{2} + y_i + \frac{h}{2}(x_i + y_i) = 1 + h$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) = x_i + \frac{h}{2} + y_i + \frac{h}{2}\left(x_i + \frac{h}{2} + y_i + \frac{h}{2}(x_i + y_i)\right) = \\ &= 1 + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}(1 + h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) = x_i + h + y_i + h\left(x_i + \frac{h}{2} + y_i + \frac{h}{2}\left(x_i + \frac{h}{2} + y_i + \frac{h}{2}(x_i + y_i)\right)\right) \\ &= h + 1 + h\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) = 1 + 2h + h^2 + \frac{h^3}{2} \end{aligned}$$

$$y_1 = 1 + \frac{h}{6}\left(1 + 2(1 + h) + 2\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) + 1 + 2h + h^2 + \frac{h^3}{2}\right)$$

$$y_1 = 1 + \frac{h}{6}\left(6 + 6h + 2h^2 + \frac{h^3}{2}\right)$$

Por condición del problema:

$$y_1 = 1 + \frac{1}{12}(h^4 + 4h^3 + 12h^2 + 12h) = n(1 + h)$$

$$h^4 + 4h^3 + 12h^2 + 12h(1 - n) + 12(1 - n) = 0$$

b) Para $n=2$:

$$h^4 + 4h^3 + 12h^2 - 12h - 12 = 0$$

Aplicando método de bisección en $[1.1, 1.3]$

Tenemos

$$h=1.2033$$