

### Solucionario del Examen Sustitutorio de Cálculo Numérico (MB535)

Solo se permite el uso de una hoja de formulario

#### Problema 1

- a) Elabore una rutina para resolver un sistema lineal  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  mediante Sobre-Relajación Sucesiva (SOR), dado el factor de sobre-relajación, una tolerancia de error y un número máximo de iteraciones. Considere un vector inicial nulo.

*%function [x, numite]=solveSOR(A, b, w, TOL, MAXITE)*

*% w : Factor de Sobre-Relajación*

(1.5 p)

#### Solución

```
function [x, numite]=solveSOR(A, b, w, TOL, MAXITE)
D=diag(diag(A));
L=D-tril(A);
U=D-triu(A);
x=zeros(size(b));
Tw=inv(D-w*L)*((1-w)*D+w*U);
Cw=inv(D-w*L)*w*b;
for i=1:MAXITE
    xn=Tw*x+Cw;
    err=norm(xn-x,2);
    x=xn;
    if (err<TOL)
        break
    end
end
numite=i;
```

- b) La función  $f(x)$  se define sobre el intervalo  $[0,1]$  como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Calcular  $I = \int_0^1 f(x)dx$  usando la regla de Simpson 1/3 (con  $h = 1/2$ ) sobre el intervalo  $[0,1]$  y hallar el error cometido.

(1.5 p)

#### Solución

Por Simpson  $I=1/6[f(0)+4f(1/2)+f(1)]=1/3$

$I_{\text{exacta}}=1/4$

Error Cometido= $1/12$

c) Sea la E.D.O:

$$\begin{cases} \frac{xy'' - 2y'}{12} = (2 - x) \\ y(1) = 1, y'(2) = 0 \end{cases}$$

con  $h=1/4$ , plantear el sistema lineal usando el método de las diferencias finitas

**(2.0 p)**

**Solución**

$$D_i = \frac{12h^2}{x_i} (2 - x_i)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & \left(1 - \frac{1}{4x_1}\right) & 0 & 0 \\ \left(1 + \frac{1}{4x_2}\right) & -2 & \left(1 - \frac{1}{4x_2}\right) & 1 \\ 0 & \left(1 + \frac{1}{4x_3}\right) & -2 & \left(1 - \frac{1}{4x_3}\right) \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 - \left(1 + \frac{1}{4x_1}\right) \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

**Problema 2**

La distribución de esfuerzos en una barra longitudinal depende de los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  y pueden aproximarse resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ -\beta & \alpha & -\beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- Encuentre una relación entre  $\alpha$  y  $\beta$  para todos los casos de convergencia del método de Jacobi. **(1.5 p)**
- Se sabe que el radio espectral de Gauss-Seidel  $\rho(T_G)$  se puede aproximar mediante el método de la potencia, realice 03 iteraciones partiendo de  $(1, 1, 1)^T$ , con  $\alpha = 2$  y  $\beta = 1$  ¿habrá convergencia para el citado método iterativo? **(2.0 p)**
- Para  $\alpha = 4$  y  $\beta = 1$  determine el  $\omega$  óptimo y realice 03 iteraciones a partir de  $(0, 0, 0)^T$ . **(1.5 p)**

**Solución**

a)

$$T_J = \begin{bmatrix} 0 & -\beta/\alpha & 0 \\ -\beta/\alpha & 0 & -\beta/\alpha \\ 0 & -\beta/\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(T_J) = \left| \frac{\sqrt{2}\beta}{\alpha} \right| < 1$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Con  $\alpha = 2$  y  $\beta = 1$ :

$$T_G = (D - L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/8 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = T_G * x_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 0.375 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 0.75 \quad x_1 = \frac{y_1}{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 0.6667 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = T_G * x_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 0.5 \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = T_G * x_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = 0.5 \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\rho(T_G) = \lambda_3 = 0.5 < 1$$

Por lo tanto habrá convergencia para el método de Gauss-Seidel.

c)

Con  $\alpha = 4$  y  $\beta = 1$ :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T_J = D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

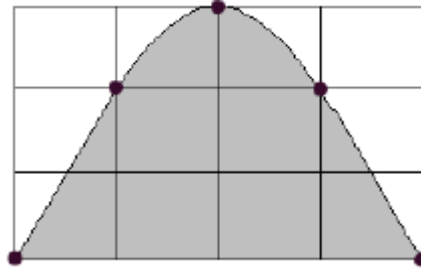
$$\rho(T_J) = 0.3536$$

$$w_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(T_J)^2}} = 1.0334$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 25.8343 \\ 32.5084 \\ 34.2326 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 33.3705 \\ 42.2142 \\ 35.5976 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 35.6264 \\ 42.8258 \\ 35.7101 \end{bmatrix}$$

### Problema 3

El recinto de la figura adjunta, que se encuentra inmerso en una cuadrícula, está limitado por una recta y una curva de la que se conoce que se trata de un polinomio de cuarto grado.



- a) Calcular el área exacta del recinto sin determinar el polinomio que la delimita sabiendo que dicha curva pasa por los puntos  $(-2, 0)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(1, 2)$  y  $(2, 0)$ , para ello obtener una fórmula de cuadratura de integración por coeficientes indeterminados de la forma:

$$\int_{-2}^2 f(x)dx = a_0f(-2) + a_1f(-1) + a_2f(0) + a_3f(1) + a_4f(2) \quad (2.5 \text{ p})$$

- b) Determinar, por el método de las diferencias divididas, el polinomio que la delimita y comprobar que el área calculada en el apartado anterior coincide con la que se obtiene por integración directa del polinomio. (2.5 p)

### Solución

(a)

Para que la fórmula integre exactamente, se debe cumplir:

$$f(x) = 1 \implies a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \int_{-2}^2 dx = 4$$

$$f(x) = x \implies -2a_0 - a_1 + a_3 + 2a_4 = \int_{-2}^2 x dx = 0$$

$$f(x) = x^2 \implies 4a_0 + a_1 + a_3 + 4a_4 = \int_{-2}^2 x^2 dx = \frac{16}{3}$$

$$f(x) = x^3 \implies -8a_0 - a_1 + a_3 + 8a_4 = \int_{-2}^2 x^3 dx = 0$$

$$f(x) = x^4 \implies 16a_0 + a_1 + a_3 + 16a_4 = \int_{-2}^2 x^4 dx = \frac{64}{5}$$

De donde se obtiene:

$$a_0 = \frac{14}{45}, \quad a_1 = \frac{64}{45}, \quad a_2 = \frac{24}{45}, \quad a_3 = \frac{64}{45} \quad \text{y} \quad a_4 = \frac{14}{45}$$

Es decir:

$$\int_{-2}^2 f(x)dx = \frac{1}{45}[14f(-2) + 64f(-1) + 24f(0) + 64f(1) + 14f(2)]$$

Por el que el área pedida es:

$$S = \frac{1}{45}[14 \cdot 0 + 64 \cdot 2 + 24 \cdot 3 + 64 \cdot 2 + 14 \cdot 0] = \frac{328}{45}$$

(b)

Por diferencias divididas tenemos:

$x_i$	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
-2	0				
		2			
-1	2		$-1/2$		
		1		$-1/6$	
0	3		-1		$1/12$
		-1		$1/6$	
1	2		$-1/2$		
		-2			
2	0				

Por lo que el polinomio de cuarto grado que delimita el recinto es:

$$P(x) = 2(x+2) - \frac{1}{2}(x+2)(x+1) - \frac{1}{6}(x+2)(x+1)x + \frac{1}{12}(x+2)(x+1)x(x-1)$$

Es decir:

$$P(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{13}{12}x^2 + 3$$

Si calculamos el área por integración directa obtenemos

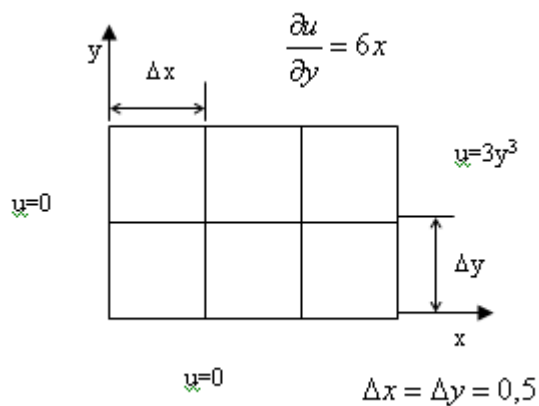
$$S = \int_{-2}^2 P(x)dx = \left[ \frac{1}{60}x^5 - \frac{13}{36}x^3 + 3x \right]_{-2}^2 = \frac{328}{45}$$

Que es la que obtuvimos en a)

#### Problema 4

Sea  $u$  un flujo potencial, que obedece al siguiente modelo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12xy$$



Se pide:

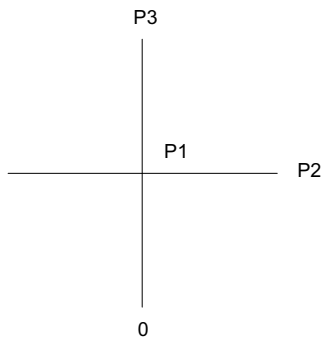
- Plantear las ecuaciones de diferencias finitas
- Resolver el sistema

(4.0 p)

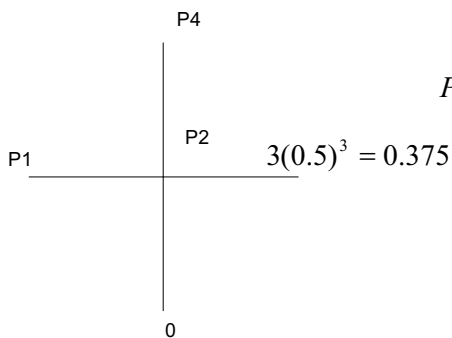
(1.0 p)

## Solución

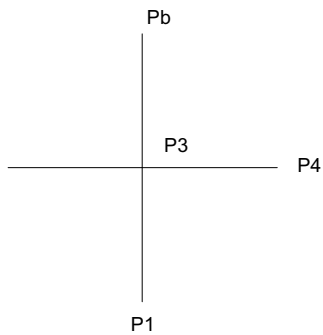
a)



$$P3 + P2 - 4P1 = 12 * (0.5)^2 * (0.5 * 0.5)$$



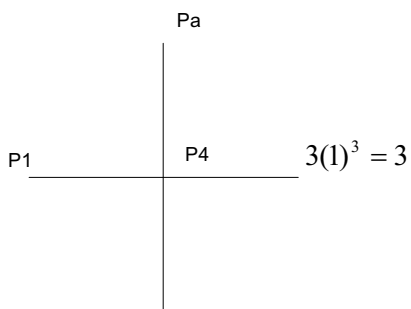
$$P4 + P1 + 0.375 - 4P2 = 12 * (0.5)^2 * (1 * 0.5)$$



$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P3} = \frac{Pb - P1}{2(0.5)} = 6 * 0.5 = 3 \Rightarrow Pb = 3 + P1$$

$$Pb + P1 + P4 - 4P3 = 12 * (0.5)^2 * (0.5 * 1)$$

$$3 + 2P1 + P4 - 4P3 = 12 * (0.5)^2 * (0.5 * 1)$$



$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P4} = \frac{Pa - P2}{2(0.5)} = 6 * (1) \Rightarrow Pa = P2 + 6$$

$$Pa + P1 + P2 + 3 - 4P3 = 12 * (0.5)^2 * (0.5 * 1)$$

$$P1 + 2P2 + 9 - 4P3 = 12 * (0.5)^2 * (0.5 * 1)$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12(0.5)^4 \\ 9(0.5)^3 \\ 12(0.5)^4 - 3 \\ 12(0.5)^3 - 9 \end{bmatrix}$$

$$P = [0.17205882352941, 0.27573529411765, 1.1625, 2.05588235294118]$$