Universidad Nacional de Ingeniería **21-07-07**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2007-1**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades **Duración: 1 Hora**

CUARTA PRÁCTICA CALIFICADA
CALCULO NUMERICO (PARTE 2)

APELLIDOS Y NOMBRE	SECCION	NOTA

P1

Estime la integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-Ln(x)}}\,dx$$

Usando la siguiente **formula abierta** (*h=1/6*):

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+\frac{3h^3}{4}f''(\varepsilon) \quad donde\ x_0 < \varepsilon < x_3$$

Estime el error.

Solución

$$I = \frac{3h}{2}\left(f(1/6)+f(1/3)+f(2/3)+f(5/6)\right)=1.4034$$

$$Err = 2\left(\frac{3h^3}{4}f''(\varepsilon)\right) \le \frac{3h^3}{2}Max\left|f''(\varepsilon)\right| \approx 0.3691$$

$$0<\varepsilon<1$$

P2

Dado:

$$y'' = x + y + y'$$
$$y(1) = 2$$
$$y'(1) = 1$$

Estime *y(1.2)* con *h=0.1* usando **Taylor de orden 2**.

Serie de Taylor de orden k : $y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + ... + \frac{h^k}{k!}y^k(x)$

Solución

$$y' = z$$
$$z' = x + y + z$$
$$y'' = z' = x + y + z$$
$$z'' = 1 + y' + z' = 1 + x + y + 2z$$

$$n = 0, 1, \Lambda$$
$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$y_{n+1} = y_n + hz_n + \frac{h^2}{2}(x_n + y_n + z_n)$$
$$z_{n+1} = z_n + h(x_n + y_n + z_n) + \frac{h^2}{2}(1 + x_n + y_n + 2z_n)$$

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 2 \quad z_0 = 1$$
$$x_1 = 1.1 \quad y_1 = 2.12 \quad z_1 = 1.43$$
$$y_2 \approx y(1.2) = 2.28625$$

P3
Dado:

$$y'' = 3x^2 y' + 2xy + sen(x)$$
$$y(0) = 0.1$$
$$y'(0) = 2.1$$

Se puede transformar en un sistema de primer orden mediante un cambio de variable:

$$y' = z$$
$$z' = 3x^2 z + 2xy + sen(x)$$
$$y(0) = 0.1$$
$$z(0) = 2.1$$

Completar el siguiente programa para obtener la solución para $x \in [0,1]$:

Solución

```
% Taylor2.m
x(1)=0; y(1)=0.1; z(1)=2.1; h=0.1;
for i=1:10
   x(i+1)=x(i)+h;
   y(i+1)=y(i)+h*z(i)
   z(i+1)=z(i)+h*(3*x(i)^2*z(i)+2* x(i)*y(i)+sin(x(i)))
end
plot(x,y,x,z)
```

P4
Resolver
y' +12y+50x=0
y(0.1)=1
Calcular y(0.3) usando el método de Euler Regresivo con h=0.1
Euler Regresivo: $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$

Solucion

$$y_{n+1} = y_n + h(-12y_{n+1} - 50x_{n+1})$$
$$y_{n+1} = \frac{y_n - 5x_{n+1}}{2.2}$$

x	y
0.1	1
0.2	0
0.3	-0.6818

P5
Desarrolle una función en Matlab que permita calcular la integral con la fórmula de newton cotes cerrada para n=2, para una función cualquiera en el intervalo [x_1,x_2] con un paso de h

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \alpha h\left(w_0 f(x_0 + w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n)\right) + E$$

Solucion

function w=newton_cotes_cerrada(f,x1,x2,h)

```
   x=x1:h:x2;
   y=feval(f,x);
   I=h/3*(y(1)+4*sum(y(2:2:n))+2*sum(y(3:2:n-1))+y(n+1));
```

P6

Considerar el problema

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Probar que el método de Euler con paso *h* genera la sucesión

$y_i = (1+\lambda h)^i y_0 \quad i = 0,1,\ldots,n$

e implementar una rutina en MatLab, dado λ, y_0, *h* que devuelva los valores de y_i para cualquier valor de n.

Solucion

$$y_1 = y_0 + h\lambda y_0 = (1+h\lambda)y_0$$

$$y_2 = y_1 + h\lambda y_1 = (1+h\lambda)^2 y_0$$

$\ldots$

$$y_i = (1+h\lambda)^i y_0$$

```
function y=calcula(Lambda,yo,h,n)
for i=1:n+1
    y(i)=(1+h*Lambda)^i*yo;
end
```

P7

Considerar el P.V.I.:

y' -2y + t = 0

y(0)=0

Calcular y(0.5) y k_i, usando el método de Runge Kutta de orden 4 con h=0.5

Sol: y(0.5)=…………k1=…………. k2=…………. k3=…………. k4=…………

Solucion

K1=0

K2= -0.125

K3= -0.1875

K4= -0.4375

Y(0.5)= -0.1771

P8

Utilizando el método de Romberg integrar numéricamente la función erf(x) para x=0,2 utilizando su definición.

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\eta) d\eta$$

Usando los pasos de 0.2 y 0.1

Solucion

$$\int_0^{0.2} e^{-x} dx$$

$$h = 0.2 \quad T_1 = h/2\left(f(0) + f(0.2)\right) = 0.1819$$
$$h = 0.1 \quad T_2 = h/2\left(f(0) + 2f(0.1) + f(0.2)\right) = 0.1814$$
$$I = \frac{4T_2 - T_1}{3} = 0.1813$$

P9

Estime la integral:

$$\int_0^1 \cos^2(x)dx$$

Usando la cuadratura de Gauss-Legendre, con un numero de puntos equivalente a usar la cuadratura de Simpson (1/3).

Solución

Si se usara 02 puntos de Legendre es equivalente a usar un polinomio de grado $P_{2m-1}(x)=P_3(x)$

Cuando se usa n=2 o n=3 (grado de polinomio de Newton Cotes cerrada) en la cuadratura la precisión es la misma

t=0.5*x+0.5

x_1=-0.577350269189626 x_2=+0.577350269189626]

Ig=0.5*[$\cos^2$(0.5*x_1+0.5)+ $\cos^2$(0.5*x_2+0.5)]

Ig = 0.726362846308896

Iex= 0.72732435670642

Isimp(h=0.5)=h/3*($\cos^2$(0)+4 $\cos^2$(0.5)+ $\cos^2$(1))= 0.728755198910451

Error_g= 0.001 (con redondeo)

Error_simp=0.001

Fórmulas:

Cuadratura Gaussiana

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)x+(b+a)}{2}\right)dx = \frac{(b-a)}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) + E$$

N	**x_i**	**c_i**
1	0.0	2.0
2	-0.577350269189626 +0.577350269189626	1.0 1.0
3	-0.774596669241483 0.0 +0.774596669241483	0.555555555555556 0.888888888888889 0.555555555555556
4	-0.861136311594053 -0.339981043584856 +0.339981043584856 +0.861136311594053	0.347854845137454 0.652145154862546 0.652145154862546 0.347854845137454

Romberg ó fórmula Recursiva de los trapecios.

$$I_{j,k} \approx \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

k=2,3,… j=1,2,3,..

Los Valores Iniciales $I_{1,1}$, $I_{2,1}$, $I_{3,1}$,…son los trapecios con 1 intervalo, 02 intervalos, 04 intervalos, …….

Los Profesores