UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
AREA ACADEMICA DE CIENCIAS BASICAS

Ciclo: 2007-I

CALCULO NUMERICO (MB535)
CUARTA PRÁCTICA CALIFICADA - PARTE I

INDICACIONES

1. Resolver las preguntas según la tabla siguiente:

SECC.	PROBLEMAS		
A	5	7	11
C	1	9	12
D	3	4	17
E	6	2	19
F	8	10	16
G	1	7	13
H	3	9	20
I	5	10	14
J	8	2	15

2. Se formaran grupos de uno o dos alumnos correspondientes a la misma sección.
3. Si se detecta dos trabajos idénticos tendrán calificativo CERO.
4. Presentar un informe adjuntando su diskette respectivo.
5. Contenido del informe:
   - Análisis del problema
   - Implementación de los algoritmos (listados de programas) y prueba
   - Conclusiones y recomendaciones

FECHA DE ENTREGA DE TRABAJO:

Día : **Sábado 21 de Julio de 2007**

Hora : **13:00 -14:00 horas**

Lugar : **Aulas de Evaluación del Test correspondiente a la P4-II.**

HORARIO DE ASESORIA

Robert Castro	Lunes	10-12	Miércoles	14-15	Centro de Cómputo
Hermes Pantoja	Martes	13-15	Jueves	15-16	Oficina A2-204
Rosa Garrido	Lunes	12-14	Miércoles	8-10	Oficina A1-254
Maximo Obregon	Miercoles	10-12	Miercoles	16-18	Centro de Cómputo

Problema 1

Sea la formula de cuadratura:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-1) + bf(-1/4) + cf(1/4) + df(1)$$

a) Obtener los coeficientes de tal manera que sea exacta para cualquier polinomio de grado 3 o menor.
b) Escriba una rutina en MATLAB para aplicar la formula anterior a las siguientes integrales:

$$\int_{1}^{2}(x^3 + x^2 + x + 1)dx \qquad \int_{3}^{4}(e^x sen(2x))dx \qquad \int_{1}^{3}(x^2 e^x sen(2x))dx$$

c) Compare sus resultados con los obtenidos con matemática simbólica y la función '**quad**'.

Problema 2

Según Sweigert y Beardsley el calor específico (*cp*) a presión constante para el vapor de agua (peso molecular 18.016) en el rango de 300 a 3000 °K se puede aproximar por la siguiente formula empírica:

$$cp = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{T}} + \frac{\gamma}{T} \quad \left(\frac{Cal}{Kg - °K}\right)$$

$$\alpha = 1.102$$

$$\beta = -24.6$$

$$\gamma = 231$$

Determine el cambio de entropía (Δs) del vapor de agua que se calienta a presión constante desde 300 °K a 1100 °K:

$$\Delta s = \int_{T1}^{T2}\left(\frac{cp}{T}\right)dT \quad \left(\frac{Cal}{Kg - °K}\right)$$

a) Aproxime Δs usando la formula de Simpson 1/3 para ello escriba una rutina en MATLAB, antes deduzca mediante la formula de error el numero de particiones requerido para tener 8 cifras decimales exactas.
b) Compare sus resultados con las obtenidas con Matemáticas simbólicas y la función "**quad**" de MATLAB.

Problema 3

$$\int_{1}^{\pi} \frac{Ln(x)}{x^2 - 2x + 2}dx$$

a) Escriba una rutina en MATLAB para generar el polinomio de Gauss-Legendre de orden "n" y sus pesos correspondientes.
b) Aproxime la integral usando la rutina anterior partiendo de n=1, 2, 3,… hasta tener 8 c.d.e.
c) Compare sus resultados con las obtenidas con matemática simbólica y la función "**quad**" de MATLAB.

Problema 4

Con respecto al método de Newton-Cotes cerrada, que usa la siguiente expresión:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h\big(w_0 f(x_0 + w_1 f(x_1) + ... + w_n f(x_n)\big) + E$$

a) Desarrolle una función que permita calcular los pesos wi en un vector fila para un n cualquiera. Usar la siguiente definición:

function w=newton_cotes_cerrada(n)

b) Usando la rutina anterior, implemente una función que permita calcular la integral aproximada de una función cualquiera en un intervalo [a,b], deberá usar las fórmulas de Newton-Cotes cerrada para cualquier n. Usar la siguiente definición:

function integral_nc(f,x0,xf,n,np)

Donde: **f:** Es una función cualquiera en cadena

xo y xf: Es el intervalo de integración

n: Es el grado para la formula de Newton-Cotes cerrada

np: Cantidad de puntos, el programa debe validar este valor

c) A través de una rutina en Matlab y usando las funciones anteriores, calcule la siguiente integral:

$$\int_{0.5}^{3.5} \frac{xsen(1/x)}{\ln(1+x^{5*\sin x}))} dx$$

Muestre en un gráfico comparativo, la integral exacta con la aproximada, para diferentes valores de n y np. Comente los resultados

Problema 5

a) Implemente una función en Matlab que permita calcular el polinomio de Legendre P(x) de grado n, sus raíces xi, los factores de peso ci y que grafique para x $\in$ [-1,1]. La cual debe tener el siguiente encabezado

function [P,xi,ci]=pol_leg(n)

b) Con la ayuda de la rutina anterior, usando cuadratura de Gauss-Legendre, implemente la siguiente función.

function integral_gl(f,x0,xf,n)

Donde: **f:** Es una función cualquiera en cadena

xo y xf: Es el intervalo de integración

n: Es el grado del polinomio de legendre

c) Use la función anterior para calcular la integral de:

$$V = \int_0^8 \frac{x^{\cos(x)}dx}{\sqrt{e^x + e^{-sen(x)}}}$$

Usando cuadratura de Gauss-Legendre, con polinomio de grado 20.

Problema 6

Con respecto al método de coeficientes indeterminados, para calcular la integral de una función:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + ... + a_n f(x_n)$$

a) Implemente la siguiente función:
   function a=obtener_coeficientes(x)
   Donde:
   x: Es el vector que contiene a: x_0, x_1,...x_n, nodos no necesariamente igualmente espaciados
   a: Es el vector que contiene a: a_0, a_1,...a_n, pesos de la cuadratura.

b) Usando los coeficientes anteriores, implemente una función que permita calcular la integral de una función cualquiera, considerando la siguiente cabecera:
   function integral_cis(f,x)
   Donde:
   f: Es una función cualquiera en cadena
   x: Son los nodos que se considera para la integración, considere los extremos, como el intervalo a integrar.

c) Usando la rutina en b), implemente una función que permita calcular la integral de una función cualquiera, considerando la siguiente cabecera:
   function integral_cic(f,n,x)
   Donde: **f:** Es una función cualquiera en cadena
   n: Es el numero de particiones
   x: Son los nodos que se considera para la integración, en cada partición.

d) Usando las funciones de b y c, con 2 juegos de valores apropiados para n y x: calcule la siguiente integral:

$$\int_0^{10} \frac{x\ln((\sin(x)\cos(x))^2 + x^2)}{1+x^{2\cos x}}dx$$

Problema 7

Dada la siguiente función

$$\int_0^1 x^{0.1}(1.2-x)(1-e^{20(x-1)})dx$$

Se pide:

a) Grafique el integrando para x=[0 1]
b) Evalue el valor exacto usando el comando el comando "int" del Matlab.
c) Use la cuadratura adaptiva de Lobatto de Matlab, y aproxime con una tol de 10^{-8}, el valor de la integral. ¿Cual es el error cometido y muestre los valores paso a paso?
d) Aplique 05 intervalos por la regla compuesta del Trapecio
e) ¿Cuál es la ventaja y desventaja de usar la regla de Simpson (1/3) o (3/8) con respecto a la regla trapezoidal al integra numéricamente esta función?

Problema 8

a) Encontrar los valores de A,B,C,D y E que hacen que la fórmula:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx Af(0)+Bf(1/4)+Cf(1/2)+Df(3/4)+Ef(1)$$

Sea exacta para todos los polinomios de grado menor o igual a cuatro.

b) Considerando A=0 y E=0, encuentre los valores B,C y D y demuestre la cuadratura abierta que ajuste exactamente para todo polinomio menor o igual a dos.

c) Pruebe la cuadratura encontrada en a) con la siguiente integral

$$I=\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$$

Comente su respuesta y compare con la solución analítica encontrada con Matlab.

d) Pruebe la cuadratura abierta encontrada en b) con la siguiente integral

$$\int_0^1 \frac{(\sin(x))^2}{x}dx$$

Comente su respuesta y compare con la solución analítica encontrada con Matlab.

Problema 9

La función error se define como:

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

a) Hallar *erf*(1) utilizando el método de Romberg, hasta alcanzar una precisión de 4 dígitos significativos. Trabajar con una cantidad suficiente de dígitos para garantizar no influya el error de redondeo.
b) Hallar *erf*(1) utilizando la cuadratura de Gauss con 5 puntos.
c) Estimar el error de truncamiento del resultado obtenido por Romberg. Estimar el resultado obtenido por Gauss debido al redondeo en las coordenadas y en los coeficientes provistos. En base a la comparación entre los resultados obtenidos en a) y b).
¿Qué puede decir del error de truncamiento del método de Gauss?
¿Cuál de los dos métodos ha resultado más trabajoso en términos de la cantidad de cálculos?

Problema 10

Calcule el cambio de entropía y entalpía ideal del dióxido de carbono a presión constante, desde 300K hasta 900K, empleando la tabla.

T(K)	Cp(KJ/Kg K)
300	0.846
400	0.939
500	1.014
600	1.075
700	1.126
800	1.148
900	1.204

Se sabe que el cambio de entropía y entalpía viene dado por:

$$\Delta H = \int CpdT$$

$$\Delta S = \int \frac{Cp}{T}\, dT$$

a) Aproxime las integrales usando la formula de Romberg usando una rutina en MATLAB,
b) Compare sus resultados con las obtenidas con Matemáticas simbólicas y la función “**quad**” de MATLAB

Problema 11

Un circuito eléctrico consiste de un capacitor de capacitancia constante C = 1.1 faradios conectado en serie con una resistencia constante de R_0 = 2.1 ohms. Se aplica un voltaje $\xi(t) = 110$ sen t en el tiempo t=0. Cuando la resistencia se calienta esta se convierte en una función de la corriente i; esto es,

$$R(t) = R_o + ki \qquad \text{donde } k = 0.9,$$

Obteniéndose la ecuación diferencial

$$\left(1 + \frac{2k}{R_o} i\right)\frac{di}{di} + \frac{1}{R_o C} i = \frac{1}{R_o}\frac{d\xi}{dt}$$

Suponiendo que i(0) = 0.

Escriba sus rutinas en MATLAB y:

a) Resuelva mediante Euler tomando h=1, 0.1 y 0.01.
b) Resuelva mediante Runge-Kutta de orden 2 y 4 tomando h=1, 0.5 y 0.1.
c) Haga un grafico comparativo de los resultados anteriores con las soluciones obtenidas con la matemática simbólica y la función ode45.

Problema 12

Sea el problema de valor inicial:

$$y' = sen(y) \qquad y(0) = 1$$

Resuelva para x entre 0 y 5, con h=0.1, 0.05 y 0.01.

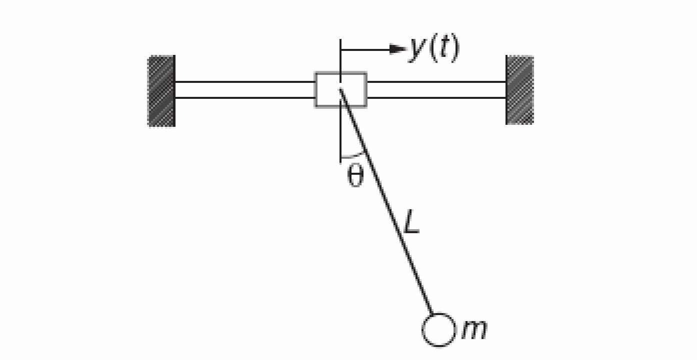
a) Analice la existencia y unicidad de la solución
b) Escriba una rutina en MATLAB para resolver mediante:
    a. Euler
    b. Taylor de orden 2, 3 y 4
    c. Runge-Kutta de orden 2
c) Haga un grafico comparativo de los resultados obtenidos en a) versus la solución exacta obtenida con matemática simbólica.
d) Resuelva mediante la función ode45 y comente sus resultados.

Problema 13

El péndulo es suspendido de un collar deslizante. El sistema esta en reposo cuando el movimiento de oscilación $y(t) = Y\ sen(\omega\, t)$ es impuesto al collar, partiendo de $t = 0$. La ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo es:

$$\theta'' = -\frac{g}{L} sen(\theta) + \frac{\omega^2}{L} Y \cos(\theta) sen(\omega\, t)$$

Grafique θ *vs.* t para *t=0* a *10 seg.* y determine el más grande θ durante este periodo. Use $g = 9.80665\ m/s^2$, $L = 1\ m$, $Y = 0.25\ m$ y $\omega = 2.5\ rad/s$



Escriba sus rutinas en MATLAB y:

d) Resuelva mediante Euler tomando h=1, 0.1 y 0.01.
e) Resuelva mediante Runge-Kutta de orden 2 y 4 tomando h=1, 0.5 y 0.1.
f) Haga un grafico comparativo de los resultados anteriores con las soluciones obtenidas con la matemática simbólica y la función ode45.

Problema 14

En una habitación que contiene 300 m^3 de aire limpio se va a celebrar una fiesta. En un instante dado t = 0 algunas personas comienzan a fumar, de modo que el humo empieza a invadir la habitación a una velocidad de 3 m^3/h, conteniendo una concentración de 0.04 gr/m^3 de monóxido de carbono. Al mismo tiempo, abrimos una ventana por la que sale el humo a la misma velocidad. Considerando un h apropiado, se pide:

a) Grafique la cantidad de humo y(t) en la habitación desde el inicio hasta 1 hora. Usar el método de Runge Kutta de orden 2 y 4
b) Grafique usando el método de Euler y compare
c) Usando el comando ode45, averigüe: ¿Cuando será prudente, que una persona abandone la fiesta, considerando que el monóxido de carbono comienza a ser peligroso con una concentración superior a 0.0002 gr/m^3?
d) averigüe, cuando deberá abandonar una persona prudente la fiesta, considerando que el monóxido de carbono comienza a ser peligroso con una concentración superior a 0.0002 gr/m^3?

Problema 15

En un campus universitario que tiene 1000 estudiantes hay un único estudiante portador del virus de la gripe. Sea y(t) el numero de estudiantes contagiados en el día t. Si la velocidad con la que el virus se propaga es proporcional al producto entre los alumnos contagiados y los estudiantes no contagiados. Considerando un h apropiado, se pide:

a) Usando el método de Runge Kutta de orden 2 y 4 determine el número de personas enfermas en el día t si se sabe que pasados 4 días hay 50 enfermos.
b) Usando el método de Euler determine cuando habría 500 estudiantes enfermos.
c) Usando el comando ode45 investigue: Si los estudiantes enfermos no se tratan con medicamentos, que número de enfermos habría cuando pase mucho tiempo. ¿Llegara a desaparecer la enfermedad?
d) Usando ode15s, monitoree a través de un gráfico del número de alumnos sanos en un periodo de una semana.

Problema 16

En una empresa de cerámica esta instalado un horno de pre-cocido, donde se sujetan las piezas a una variación de temperatura. En el interior del horno, cada pieza de cerámica es transportada a través de una faja rodante. La variación de la temperatura (T en ºC), en función de la distancia cubierta (*x*, en metros), es descrita por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dT}{dx} = 0.1xT^{1.1}$$

Se conoce que $T(x=0)$= 40ºC, determine la variación de la temperatura de una pieza, para x=0:1:3*m*.
¿Cuántos metros serían necesarios para que la temperatura de la pieza alcance los 195ºC?

Problema 17

Un perro ve a su dueño caminando recorriendo un camino (inicialmente a 500 metros), y corre hacia él. Si se asume que el perro corre siempre en dirección del dueño y que el camino es rectilíneo, la ecuación que describe la trayectoria (x e y, en kilómetro), es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{R}{x}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Siendo R la razón entre las velocidades del hombre y del perro. Considerando R=0.5, y(x=0.5)=0, y'(x=0.5)=1 y x=0.5(0.1)1.0. ¿al cabo de que distancia (en metros), recorrida por el hombre, el perro llega a alcanzarlo?

Transforme esta ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de ecuaciones de primer orden.
¿Cuáles serian los resultados finales si R=0.2?

Problema 18

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en los 30 primeros segundos

$$\frac{dx}{dt} = 10(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(20 - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z$$

a) Utilice el método de Runge Kutta de orden 4, intente al menos con 3 valores de h diferentes.
b) Compare sus resultados, usando **ode45** del Matlab usando los mismos valores de h usados en el item a)
c) Grafique usando x, y y z vs t, usando plot3
d) Grafique x vs y , y vs z y z vs x
e) Varie en forma ínfima a los 3 parámetros del sistema de ecuaciones y discutir los resultados.

Problema 19

La trayectoria de una partícula que se mueve en el plano está dada por las curvas $(y_1(t),y_2(t))$, donde las funciones y1,y2 son la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) - y_2(t) \end{aligned}$$

Resolver este sistema en el intervalo [0,20] con el método de Euler utilizando tamaño de paso h =0.05 y graficar la trayectoria de la partícula, sabiendo que en el tiempo t=0 se encontraba en el punto (1,-1). Realizar nuevamente el gráfico utilizando la solución obtenida con el comando **ode45**.

Problema 20

Analice el comportamiento de ecuaciones stiff.
Para ilustrar en que consiste un problema de estas características, consideremos en primer
lugar la resolución de la siguiente ecuación diferencial

$$y' = -50(y - \cos(t)), \quad 0 \le t \le 1.25, \; y(0) = 0$$

Se pide:

1. Demuestre si la EDO tiene solución única usando el Teorema de Lipschitz.

2. Utilizar el método de Euler explicito con pasos h = 1.25/31 y h = 1.25/32 para resolver la ecuación planteada. Representar gráficamente ambos resultados junto con la solución exacta en una misma. ¿Qué se observa?.Comprobar el comportamiento para otros valores de h, tanto mayores como menores de los antes considerados.
3. Considerar el método de Euler implícito: $y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}, t_{n+1})$ para resolver el problema planteado, con un paso h = 1.25/31. Representar gráficamente el resultado.
4. Discutir la estabilidad de ambos métodos (Euler explicito e implícito) para la resolución de la ecuación diferencial problema.

Lima, 13 de Julio de 2007

Los Profesores