Universidad Nacional de Ingeniería **23-06-07**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2007-1**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

SOLUCIONARIO DE LA TERCERA PRÁCTICA CALIFICADA CALCULO NUMERICO MB-535

Solo se permite el uso de una hoja de formulario

Problema 1

Resuelva solo 3 de las 4 opciones:

a) Dada la función f(x)=**B**.sin(x+2), se desea pasar una recta y=**a**x+1, que se ajuste a los puntos de f(x) en x = [3, 4, 5]. Hallar **B** y **a**.

Solución

$$\begin{bmatrix} \sum x & n \\ \sum x^2 & \sum x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f(x) \\ \sum xf(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 50 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5814\text{B} \\ -0.7095\text{B} \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

B = -0.291937

a = -0.235857

b) Encontrar los splines cúbicos naturales para los siguientes datos:

x	-1	0	1
y	1	0	1

Solución

$$\begin{cases} S_0(x) = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{3x^2}{2} & -1 \le x \le 0 \\ S_1(x) = -\dfrac{x^3}{2} + \dfrac{3x^2}{2} & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

c) Sea la tabla:

X	0	1	2	3	4
Y	1	1	2	3	5

Si Y(X+1)=Y(X)+Y(X-1), para X=1, 2, 3, 4….

Aproxime Y(5) usando un polinomio de Newton diferencias finitas y determine su error. Comente su respuesta.

Solución

X	Y	ΔY	Δ^2Y	Δ^3Y	Δ^4Y
0	1				
		0			
1	1		1		
		1		-1	
2	2		0		2
		1		1	
3	3		1		
		2			
4	5				

$$P_4(s)=1+\frac{s(s-1)}{2}-\frac{s(s-1)(s-2)}{6}+2\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{24} \qquad s=\frac{x-0}{1}=X$$

$$P_4(X)=\frac{1}{12}X^4-\frac{2}{3}X^3+\frac{23}{12}X^2-\frac{4}{3}X+1$$

$$Y(5)\approx P_4(5)=11$$

$$Y(5)=Y(4)+Y(3)=8$$

$$Error=3$$

El error es grande dado que se trata de una extrapolación.

d) Implemente una rutina que permita calcular la derivada enésima de una función cualquiera, use la siguiente cabecera:

function yp=dn(fun,x0,n)

fun: es la cadena donde se indicara la función

xo: es el punto donde se evalúa la derivada

n: es el orden de la derivada

Considere la fórmula de diferencia centrales de tres puntos para aproximar la derivada.

Solución

```
function yp=dn(fun,x0,n)
f=inline(fun);
h=0.01;
if (n==1) yp=(-3*f(x0)+4*f(x0+h)-f(x0+2*h))/(2*h);
else
   yp=(-3*dn(fun,x0,n-1)+4*dn(fun,x0+h,n-1)-dn(fun,x0+2*h,n-1))/(2*h);
end
```

Problema 2

Cuando una población P(t) no puede crecer más de un cierto valor límite L, la gráfica de la función P(t) es una curva llamada curva logística de ecuación $y = L/(1+ce^{at})$. Ajuste los valores de c y a para L = 1000 y la tabla

t	0	1	2	3	4
P(t)	200	400	650	850	950

Solución

Agrupando convenientemente y tomando logaritmos:

$$Ln\left(\frac{1000}{y}-1\right) = at + Ln(c)$$

$$Y = at + b$$

t	0	1	2	3	4
$y=P(t)$	200	400	650	850	950
$Y = Ln\left(\frac{1000}{y}-1\right)$	1.3863	0.4055	-0.6190	-1.7346	-2.9444

Realizando un ajuste lineal entre t e Y: $a = -1.0802$ $b = 1.4590$
Pero $c=e^b$ = 4.3018, por lo tanto:

$$y = \frac{1000}{1+4.3018e^{-1.0802\,t}}$$

Problema 3

Obtener una interpolación por Spline Cúbico forzado para $f(x) = (x-1)^4$ en x=0, 1, 1.5. Se pide:

a) Mostrar las funciones Spline $S(x)$ para cada intervalo.
b) Demuestre que las funciones Spline cumple las condiciones mínimas.
c) Interpole para x=0.5 y x=1.25 y determine el error cometido en cada caso.

Solución

x	0	1	3/2
y	1	0	1/16

$h_0=1$ $h_1=1/2$
$y[x_0,x_1]=-1$ $y[x_1,x_2]=1/8$

$\alpha = f'(0) = -4 \quad \beta = f'(3/2) = 1/2$

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} y[x_0 x_1] - \alpha \\ y[x_1 x_2] - y[x_0 x_1] \\ \beta - y[x_1 x_2] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 27/4 \\ 9/4 \end{bmatrix}$$

$M_0 = 39/4 \quad M_1 = -3/2 \quad M_2 = 3$

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}$$

$$b_i = \frac{M_i}{2}$$

$$c_i = y[x_i x_{i+1}] - \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} h_i$$

$$d_i = y_i$$

a_0 = -15/8 *a_1=3/2*
b_0 = 39/8 *b_1=-3/4*
c_0 = -4 *c_1=1/8*
d_0 = 1 *d_1=0*

f'(0)=-4 f '(1.5)=1/2

a) $S_0(x)= -15/8x^3+39/8x^2-4x+1$ $0<= x<=1$

$S_1(x)=3/2\ (x-1)^3-3/4\ (x-1)^2+1/8(x-1)$ $1<= x<=1.5$
ó
$S_1(x)=3/2\ x^3-21/4\ x^2+49/8x -19/8$ $1<= x<=1.5$

b) $S_0(1) = S_1(1)= 0$ $S_0(x_j)=y_j$ $S_1(x_j)=y_j$ j=0,1,2
$S'_0(x) = -45/8x^2+39/4x-4$ $S'_1(x)= 9/2x^2-21/2x+49/8$
$S'_0(1) = S'_1(1)=1/8$
$S''_0(x) = -45/4x+39/4$ $S''_1(x)= 9x-21/2$
$S''_0(1) = S''_1(1)=-3/2$

c)
$S_0(0.5)= -1/64$ f(0.5)= 1/16 Error1= $|f(0.5)- S_0(0.5)|$ =0.0781
$S_1(1.25)= 0.0078$ f(0.5)= 0.0039 Error2= $|f(1.25)- S_1(1.25)|$ =0.0039

Problema 4

Se desea obtener la raíz de la función $y(x)=\sqrt{x}-e^{-x}$, para lo cual se realizara una interpolación inversa, para determinar una aproximación de $x(y)$ mediante el polinomio interpolante $P_4(y)$, usando la información de la siguiente tabla:

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$y(x)=\sqrt{x}-e^{-x}$	-1	-0.2788	0.1006	0.3937	0.6321

a) Obtener el polinomio interpolante de Newton $P_4(y)$ usando diferencias divididas.
b) Estimar la raíz aproximada usando el polinomio anterior
c) Determine el numero de cifras decimales exactas de dicha aproximación si la solución exacta es 0.4263.

Solución

a) Polinomio interpolante:

y	x	x[,]	x[,,]	x[,,,]	x[,,,,]
-1	0				
		0.3466			
-0.2788	0.25		0.2837		
		0.6589		0.0034	
0.1006	0.5		0.2885		0.0515
		0.85295		0.0875	
0.3937	0.75		0.3682		
		1.0487			
0.6321	1				

$P_4(y)$= 0.3466(y+1) + 0.2837(y+1)(y+0.2788) + 0.0034(y+1)(y+0.2788)(y-0.1006)
+ 0.0515 (y+1)(y+0.2788)(y-0.1006)(y-0.3937)

$P_4(y) = 0.0515\, y^4 + 0.0438\, y^3 + 0.2716\, y^2 + 0.7055\, y + 0.4262$

b) Raiz $\approx P_4(y=0)=0.4262$
c) Error = $0.0001=0.1\text{x}10^{-3}\leq 0.5\text{x}10^{-n}$
n = 3 c.d.e.

Los Profesores