Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2007-1**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades **27-07-2007**

Solucionario del Examen Final de Cálculo Numérico (MB535)

Sin copias ni apuntes

Problema 1

a) La energía consumida por un dispositivo eléctrico en el tiempo $[t_0, t_1]$, se puede calcular mediante la integral: $\int_{t_0}^{t_1} P(t)\,dt$, donde la potencia eléctrica es $P(t) = v(t) * i(t)$, si el voltaje aplicado es $v(t) = e^t$ y la intensidad de corriente $i(t) = t^2$. Determine el numero de particiones mínimo requerido para obtener la energía para t en *[0,1]* con una precisión de 3 cifras decimales exactas mediante la formula compuesta de Simpson 3/8. **(1.5 Ptos)**

Solución

$$\int_0^1 e^t t^2 dt$$

$$En = \frac{n}{3}\left(-\frac{3h^5}{80} f^{(IV)}(\xi)\right) = \frac{(b-a)h^4 f^{(IV)}(\xi)}{80} \le \frac{(b-a)h^4 \max\left|f^{(IV)}(\xi)\right|}{80}$$

$$f(t) = e^t t^2$$

$$f^{(IV)}(t) = e^t\left(t^2 + 8t + 12\right)$$

$$\max\left|f^{(IV)}(\xi)\right| = 21e = 57.0839 \quad 0 < \xi < 1$$

$$\frac{(1-0)(57.0839)}{80n^4} \le 0.5x10^{-3}$$

$$n \ge 6.1463$$

$$n = 9$$

Teniendo en cuenta que n debe ser múltiplo de 3.

b) En la interpolación de una función f que pasa por los puntos $x_i = 2i, \quad i = 0,1,2$. Se sabe que f(0)=-4 , f(4)=4 y f[2,4]=6. Hallar f[0,2,4] . **(1 Pto)**

Solución

xi	**fi**	**f[,]**	**f[,,]**
0	-4	b	c
2	a	6	
4	4		

Hallando a

(4 –a)/2 =6 ➔ a=-8

Hallando b

(-8-(-4))/2=b ➔ b=-2

Hallando c

(6-(-2))/4=2

Rpta

f[0,2,4]=2

c) Para la siguiente ecuación diferencial: $\ddot{y}-\dot{y}$-sin(x+y)*y-cos(x)=0

Complete las 3 líneas que faltan en las funciones de matlab para graficar **y** y **y'** desde **x1** hasta **x2** con un paso de **h**, usando el método de Euler, donde:

fun: Es la función que representa a $\dot{y}$

y1=y(x1) yp1= $\dot{y}$(x1)

Ec. Euler: $y_{i+1} = y_i + h * \dot{y}_i$

```
function yp=fun(x,y)
y1=y(1);y2=y(2);
yp1=y2;

yp2=__________________

yp=_____________
```

```
function graficar(x1,x2,y1,yp1,h)
x=x1:h:x2;
y=[y1 yp1]';
np=length(x);
for i=2:np

_______________________________________
end
plot(x,y)
```

(1 Pto)

Solución

- yp1+sin(x+y1)*y1-cos(x);
- [yp1 yp2]';
- y(:,i)=y(:,i-1)+h*fun(x(i-1),y(:,i-1));

d) El polinomio de Legendre se usa para calcular la integral, desarrolle un programa que genere dicho polinomio para un **n** cualquiera:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

$$para \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Con la cabecera: ***function p=pol_leg(n)*** **(1.5 Ptos)**

Solución

```
function p=pol_leg(n)
p=[1 0 -1];
q=1;
for i=1:n
  q=conv(q,p);
end
for i=1:n
  q=polyder(q);
end
p=q/((2^n)*factorial(n))
```

Problema 2

Dada la función $f(x)=\left|x-\frac{1}{6}x^3\right|$

a) Hallar el polinomio interpolante *P*(x) que pase por los puntos $x_0=-h,\ x_1=0,\ x_2=h$

(h es un real estrictamente positivo y menor que $\sqrt{3}$) e interpolar en x =1.5 **(1.5 Ptos)**

b) Calcule una cota superior del error de interpolación $|f(x)-P(x)|$. Para h=0.1. **(1.5 Ptos)**

c) Deducir de forma razonada la fórmula de derivación numérica de tipo interpolante que permita aproximar el valor de $f''(h/2)$. **(1 Pto.)**

Solución

a) Construyendo la tabla de diferencias divididas

xi	fi	f[,]	f[,,]
-h	$h - 1/6h^3$	$-1 + 1/6h^2$	$1/h - h/6$
0	0	$1 - 1/6h^2$	
h	$h - 1/6h^3$		

Fórmula de Newton

$$P_2(x)=h-\frac{h^3}{6}+(-1+\frac{h^2}{6})(x+h)+(\frac{1}{h}-\frac{h}{6})(x+h)x=(\frac{1}{h}-\frac{h}{6})x^2$$

$$P_2(1.5)=(\frac{1}{h}-\frac{h}{6})(1.5)^2$$

b) Si se considera h=0.1

$$P_2(x)=\frac{599}{60}x^2$$

Error de Interpolación

$$E(x)=f(x)-P_2(x)=\left|x-x^3\right|-\frac{599}{60}x^2$$

$$E(x)=\begin{cases}-x+\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{599}{60}x^2 & \text{Si} \quad x<0\\ x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{599}{60}x^2 & \text{Si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

Sea

$$E_1(x)=-x+\frac{x^3}{6}-\frac{599}{60}x^2 \quad \text{Para} \quad x<0$$

$$\Rightarrow \quad E_1{}'(x)=-1+\tfrac{1}{2}x^2-\frac{599}{30}x$$

Para

$$E_1{}'(x^*)=0 \quad \text{Tenemos} \quad x^*=-0.09966941$$

Luego

$$E_1(-0.09966941)=0.0003300374\ldots<0.0003300375$$

Ahora para

$$E_2(x)=x-\frac{x^3}{6}-\frac{599}{60}x^2 \quad \text{Para} \quad x\geq 0$$

$$\Rightarrow \quad E_2{}'(x)=1-\tfrac{1}{2}x^2-\frac{599}{30}x$$

Para

$E_2{}'(x^*)=0$ Tenemos $x^*=0.09966941$

Luego

$E_2(-0.09966941)=0.0003300374...<0.0003300375$

$\therefore \forall x\in[-0.1,0.1]\quad |E(x)|\le 0.0003300375$

c) Derivando la expresión del polinomio interpolante obtenemos:

$$f''(x)\approx P_2''(x)=\left(\frac{2}{h}-\frac{h}{3}\right)$$

Particularizando

$$f''(\tfrac{h}{2})\approx P_2''(\tfrac{h}{2})=\left(\frac{2}{h}-\frac{h}{3}\right)$$

Problema 3

a) Demuestre que una integral con límites infinitos $\int_a^\infty f(x)dx$ puede transformarse mediante el cambio de variable $x={}^a\!/_t$ en otra equivalente con límites finitos $a\int_0^1 \frac{f\left({}^a\!/_t\right)}{t^2}dt$. **(0.5 Ptos.)**

b) Transforme la integral $\int_1^\infty e^{-\sqrt{x}}sen\left(\sqrt{x}\right)dx$ en su equivalente con limites finitos usando el procedimiento dado en a) **(0.5 Ptos.)**

c) Deduzca una formula de integración numérica de la forma:

$$\int_0^1 g(t)dt\approx a\ g(1/8)+b\ g(1/2)+c\ g(7/8)$$ **(2 Ptos.)**

d) Estime la integral obtenida en b) usando la formula deducida en c). **(1 Pto.)**

e) Estime el error comparando con la solución exacta y comente sus resultados. **(1 Pto.)**

Solución

a) $$\int_a^\infty f(x)dx$$

$$x={}^a\!/_t$$

$$dx=-{}^a\!/_{t^2}\,dt$$

$$x=a\Rightarrow t=1$$

$$x=\infty\Rightarrow t=0$$

$$\int_1^0 \frac{-af\left({}^a\!/_t\right)}{t^2}dt=a\int_0^1\frac{f\left({}^a\!/_t\right)}{t^2}dt$$

b)

$$a = 1$$

$$\int_0^1 \frac{f\left(1/t\right)}{t^2} dt = a = 1$$

$$\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{1/t}} sen\left(\sqrt{1/t}\right)}{t^2} dt$$

c) Será exacta para cada una de las siguientes funciones: $w = \{1, x, x^2\}$.

$$a + b + c = 1$$

$$\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b + \frac{7}{8}c = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{64}a + \frac{1}{4}b + \frac{49}{64}c = \frac{1}{3}$$

$$a = \frac{8}{27} \quad b = \frac{11}{27} \quad c = \frac{8}{27}$$

d)

$$g(t) = \frac{e^{-\sqrt{1/t}} sen\left(\sqrt{1/t}\right)}{t^2}$$

$$I = a\ g(1/8) + b\ g(1/2) + c\ g(7/8)$$

$$I = 8/27 * 1.1654 + 11/27 * 0.9606 + 8/27 * 0.3932$$

$$I = 0.8531$$

e) Cambio de variable: $u = \sqrt{x}$, $u^2 = x \quad 2u\,du = dx$

$$\int_1^\infty 2e^{-u}\ u\ sen(u)\,du = (-.u - 1)e^{-u}\cos(u) - e^{-u}\ u\ sen(u)\Big|_1^\infty = 2 * \cos(1) * e^{-1} + e^{-1} * \sin(1) = 0.7071$$

$$Ie = 0.7071$$

$$err = |Ie - I| = 0.146$$

El error es grande dado que la formula fue diseñada para ser exacta en polinomios de segundo grado o menores, además la integral presenta inestabilidad en uno de los extremos.

Problema 4

Una barra metálica de longitud L esta colocada entre dos cuerpos a temperaturas T(0) y T(L). Esta barra no está aislada y puede intercambiar calor con el entorno, que se encuentra a una temperatura T_a. En estado estacionario la temperatura de la barra verifica la ecuación:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h(T_a - T) = 0$$

Consideremos el caso concreto: L=10m, h=0.01m^{-2}, T(0) = 40ºC, T(10) = 200ºC, T_a = 20ºC. Se desea Hallar la distribución de las temperaturas usando N=4 (pasos).
Se pide:

a) Transforme el sistema en un sistema de EDOs y defina el algoritmo de Euler para este sistema. **(1 Pto.)**
b) Suponga que para una pendiente inicial (dT(0)/dx=10) el valor de T(10) $\approx$153.828ºC y para (dT(0)/dx=20) el valor de T(10) $\approx$ 260.078, usando Euler con N=4. Aplique el método del disparo (un solo proceso) con una pendiente más exacta que se encuentra entre las dos anteriores y muestre la distribución de temperaturas, esbozando un gráfico a mano alzada. **(2 Ptos.)**
c) Usando el método de las diferencias finitas, con el mismo espaciamiento anterior, plantee el sistema de ecuaciones. **(2 Ptos.)**
d) Resolver el sistema obtenido en c) y comparar con la solución analítica:

$$T(x) = -20\frac{\left(e^{0.1x} - 9e^{0.1x+1} + e^{-0.1x+1} - e^{-0.1x+2} - e^2 + 1\right)}{e^2 - 1}$$

¿Comente cuál es el mejor método que se usaría para este problema? **(1 Pto.)**

Solución

Variables de estado $z_1 = T(x)$ y $z_2 = T'(x)$

$$\frac{dz_1}{dx} = z_2 \qquad F(x, z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -0.01(20 - z_1) \end{bmatrix} \qquad Z=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} Z' = F(x, Z) \\ Z(0) = \begin{bmatrix} 40 \\ z_2(0) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\frac{dz_2}{dx} = -0.01(20 - z_1)$$

Algoritmo de Euler

$$\begin{bmatrix} z_1^{(i+1)} \\ z_2^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^{(i)} \\ z_2^{(i)} \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} z_2^{(i)} \\ -0.01(20 - z_1^{(i)}) \end{bmatrix}$$

i=0,1,2,3

b) so=10 YNso=153.828, s1=20 YNs1= 260.078

pendiente mejorada s_2=s_1-(YNs1-200)/(YNso-YNs1)*(so-s1)

s2= 14.3456 aplicando Euler con N=4

x	z_1	z_2
0	40	14.3456
2.5	75.864	14.8456
5.0	112.978	16.2422
7.5	153.5835	18.56665
10.0	200.0001	21.9062375

c) Aplicando diferencias finitas a las derivadas h=2.5, i=1,2,3

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2} + 0.01(20 - Ti) = 0 \quad T_{i-1} - 2.0625T_i + T_{i+1} + 1.25 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2.0625 & 1 & 0 \\ 1 & -2.0625 & 1 \\ 0 & 1 & -2.0625 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.25 - 40 \\ -1.25 \\ -1.25 - 200 \end{bmatrix}$$

d) Solución aplicando diferencias finitas

x	z_1
0	40
2.5	72.72
5.0	108.735
7.5	150.296
10.0	200.000

Teniendo en cuenta que los valores exactos son los siguientes:

T	40	72.68	108	150	200

Para este ejemplo mejor es usando diferencias finitas, porque se comete menor error.

Los Profesores