Universidad Nacional de Ingeniería **27-01-07**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2006-3**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

SOLUCIONARIO DE LA PRIMERA PRÁCTICA CALIFICADA DE CALCULO NUMERICO MB-535

Solo se permite el uso de una hoja de formulario

Problema 1

La relación que describe el gasto de aire a bajas velocidades a través de un medidor de flujo es:

$$m = C.A\left[\frac{2g_c p_1}{RT_1}(p_1 - p_2)\right]^{1/2}$$

donde C es un coeficiente de descarga empírico, A el área de flujo, p_1 y p_2 las presiones corriente arriba y corriente abajo, T_1 la temperatura corriente arriba y R la constante de gas para el aire. ¿Cuales son los límites de variación del gasto de aire m?, para las siguientes condiciones:

C = 0.920 ± 0.005 (datos de calibración)
p_1 = 25.0 psia ± 0.5 psia (libras por pulgadas cuadrada)
T_1 = 294 ^{o}K ± 2 ^{o}K
$\Delta p = p_1 - p_2$ = 1.400 psi ± 0.005 psi (medida directamente)
A= 1.000 m^2 ± 0.001 m^2.
R=0.082
g_c=9.8

Solución

El gasto de aire es una función de varias variables:
$m = f(C, A, p_1, \Delta p, T_1)$, donde:
gc=9.8, p1=25, R=0.082, T1=294, Δp=1.4, c=0.92, A=1
ε_{p1}=0.5, ε_{T1}=2, $\varepsilon_{\Delta p}$=0.005, ε_c=0.005, ε_A=0.001
Las respectivas derivadas son:

$$\frac{\partial m}{\partial C} = A\left(\frac{2g_c p_1}{RT_1}\Delta p\right)^{1/2} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial C} = 5.3343$$

$$\frac{\partial m}{\partial A} = C\left(\frac{2g_c p_1}{RT_1}\Delta p\right)^{1/2} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial A} = 4.9076$$

$$\frac{\partial m}{\partial p_1} = 0.5CA\left(\frac{2g_c}{RT_1}\Delta p\right)^{1/2} p_1^{-1/2} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial p_1} = 0.0982$$

$$\frac{\partial m}{\partial \Delta p} = 0.5CA\left(\frac{2g_c p_1}{RT_1}\right)^{1/2} \Delta p^{-1/2} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial \Delta p} = 1.7527$$

$$\frac{\partial m}{\partial T_1} = -0.5CA\left(\frac{2g_c p_1}{R}\Delta p\right)^{1/2} T_1^{-3/2} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial T_1} = \text{-0.0083}$$

$\varepsilon(m) = 5.3343 * 0.005 + 4.9076 * 0.001 + 0.0982 * 0.5 + 0.0083 * 2 + 1.7527 * 0.005 = 0.1061$

Entonces

$m - \varepsilon \leq M \leq m + \varepsilon$

$4.9076 - 0.1061 \leq M \leq 4.9076 + 0.1061$

$4.8015 \leq M \leq 5.0137$

Problema 2

Sea un sistema binario de punto flotante de 16 bits:

s	$e_1e_2e_3e_4e_5$	$m_1m_2m_3m_4m_5m_6m_7m_8m_9m_{10}$

Donde los números normalizados son de la forma:

$$x = (-1)^s 1.m_1m_2m_3 \cdots m_{10} 2^{(e_1e_2e_3e_4e_5)_2 - 15}$$

Además:

$$00000_2 < (e_1e_2e_3e_4e_5)_2 < 11111_2$$

Muestre la representación en punto flotante y los 16 bits del:

a) Numero 1
b) El numero 1+eps
c) Mayor valor positivo normalizado
d) Menor valor positivo normalizado
e) El numero: 475.65625

Solución

a)

$(-1)^0 1.0000000000 x 2^{01111_2 - 15}$

0 01111 0000000000

b)

$(-1)^0 1.0000000001 x 2^{01111_2 - 15}$

0 01111 0000000001

c)

$(-1)^0 1.1111111111 x 2^{11110_2 - 15}$

0 11110 1111111111

d)

$(-1)^0 1.0000000000 x 2^{00001_2 - 15}$

0 00001 0000000000

e)

$475.65625 = 111011011.10101_2 = 1.1101101110\text{x}2^8$

$(e_1e_2e_3e_4e_5)_{2-15=8}$

$(e_1e_2e_3e_4e_5)_{2=23=}10111_2$

0 10111 1101101110

Problema 3

Sea el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1/7 & 1/6 & 1/5 & 1/4 \\ 1/6 & 1/5 & 1/4 & 1/3 \\ 1/5 & 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 319/420 \\ 19/20 \\ 77/60 \\ 25/12 \end{pmatrix}$$

Se sabe que los cálculos se realizan con un computador hipotético que usa una aritmética de punto flotante con redondeo a 3 dígitos significativos.
Ejm. 143.852 se redondea a $0.144\text{x}10^3$, 0.005627 se redondea a $0.563\text{x}10^{-2}$

a) Analice el condicionamiento del sistema y estime el número de dígitos de precisión esperados.
b) Resolver usando redondeo de 03 dígitos significativos usando Eliminación de Gauss con pivoteo total. Comente sus resultados.

Solución

a)

$k(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 2.8375\text{e}+004$

$s \geq t - \log_{10} k(A)$

$t = 3$

$s \geq 3 - 4.4529$

$\text{s} \geq -1.4529$

No se espera tener ninguna cifra de precision en la solucion. Por lo tanto el sistema esta mal condicionado.

b)

$$\begin{bmatrix} 0.143 & 0.167 & 0.200 & 0.250 \\ 0.167 & 0.200 & 0.250 & 0.333 \\ 0.200 & 0.250 & 0.333 & 0.500 \\ 0.250 & 0.333 & 0.500 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.760 \\ 0.950 \\ 1.28 \\ 2.08 \end{bmatrix}$$

Intercambiamos fila 1 y fila 4

$$\begin{bmatrix} 0.250 & 0.333 & 0.500 & 1.000 \\ 0.167 & 0.200 & 0.250 & 0.333 \\ 0.200 & 0.250 & 0.333 & 0.500 \\ 0.143 & 0.167 & 0.200 & 0.250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.08 \\ 0.950 \\ 1.28 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Intercambiamos columna 1 y columna 4

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.333 & 0.500 & 0.250 \\ 0.333 & 0.200 & 0.250 & 0.167 \\ 0.500 & 0.250 & 0.333 & 0.200 \\ 0.250 & 0.167 & 0.200 & 0.143 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.08 \\ 0.950 \\ 1.28 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = 0.333 \quad m_{31} = \frac{A_{31}}{A_{11}} = 0.500 \quad m_{41} = \frac{A_{41}}{A_{11}} = 0.250$$

$$f2 = f2 - m_{21} f1 \quad f3 = f3 - m_{31} f1 \quad f4 = f4 - m_{41} f1$$

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.333 & 0.500 & 0.250 \\ 0 & 0.0890 & 0.0830 & 0.0837 \\ 0 & 0.0830 & 0.0830 & 0.0750 \\ 0 & 0.0837 & 0.0750 & 0.0805 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.08 \\ 0.257 \\ 0.24 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{A_{32}}{A_{22}} = 0.933 \quad m_{31} = \frac{A_{42}}{A_{22}} = 0.940$$

$$f3 = f3 - m_{32} f2 \quad f4 = f4 - m_{42} f2$$

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.333 & 0.500 & 0.250 \\ 0 & 0.0890 & 0.0830 & 0.0837 \\ 0 & 0 & 0.0056 & -0.0031 \\ 0 & 0 & -0.0030 & 0.0018 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.08 \\ 0.257 \\ 0 \\ -0.002 \end{bmatrix}$$

$$m_{43} = \frac{A_{43}}{A_{33}} = -0.536$$

$$f4 = f4 - m_{43} f3$$

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.333 & 0.500 & 0.250 \\ 0 & 0.0890 & 0.0830 & 0.0837 \\ 0 & 0 & 0.0056 & -0.0031 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000140 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.08 \\ 0.257 \\ 0 \\ -0.002 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -14.3 \quad x_2 = 23.7 \quad x_3 = -7.91 \quad x_4 = 1.71$

Puesto que la solución exacta es $[1\ 1\ 1\ 1]^T$, se verifica el mal condicionamiento del sistema.

Problema 4
Considere el sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + 4y + 2z = 9 \\ -2x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

(a) Obtener la factorización LU de Doolite de la matriz de coeficientes y utilizarlo para resolver el sistema.
(b) Justifique que la matriz de coeficientes es simétrica y definida positiva
(c) Resuelva por el método de Cholesky.

Solución

(a)
Factorizando:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 2/7 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 7/2 & 1 \\ 0 & 0 & 5/7 \end{pmatrix}$$

Resolviendo
A**x**=b➔ (LU)**x**=b ➔ U**x**=**z** ^ L**z**=b

$$z = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 5/7 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)
$A==A^T$
Por Silvester:
$A_{11}>0$

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} > 0$$

det(A)>0
Luego:
A es simétrica y definida positiva
(c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{14}/2 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{14}/7 & \sqrt{35}/7 \end{pmatrix}$$

Resolviendo
A**x**=b➔ (LL^t)**x**=b ➔ L^t**x**=**z** ^ L**z**=b

$$z = \begin{pmatrix} -1.4142 \\ 4.2762 \\ 0.8452 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los Profesores