

SOLUCIONARIO DE LA CUARTA PRÁCTICA  
DE CALCULO NUMERICO  
PARTE B

Apellidos y Nombres	Código	Sección	Nota

SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO.

Marque la alternativa que considere correcta o complete según el caso:

**Pregunta 1**

Al integrar  $I = \int_1^2 e^{2x+5} dx$ , cuántas particiones del método del trapecio se requieren para tener 3 cifras decimales exactas.

**Solución**

$$\varepsilon = \frac{(b-a)}{12} h^2 |f''(\varepsilon)| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 M \leq 0.5 \times 10^{-3} \quad M = \max |f''(\varepsilon)| \quad 1 \leq \varepsilon \leq 2$$

$$f''(x) = 4e^{2x+5} \quad M = 4e^9$$

$$\frac{4e^9}{12n^2} \leq 0.5 \times 10^{-3} \Rightarrow n = 2325$$

**Pregunta 2**

Sea la integral  $\int_a^{2a} (ax^3 + 1) dx$ , para la cuadratura de Romberg, obtener  $R_{2 \times 2}$

**Solución**

$$h = a$$

$$R_{11} = \frac{h}{2} (f(a) + f(2a)) = \frac{9}{2} a^5 + a$$

$$h = a/2$$

$$R_{21} = \frac{h}{2} \left( f(a) + 2f\left(\frac{3a}{2}\right) + f(2a) \right) = \frac{63}{16} a^5 + a$$

$$R_{22} = \frac{4R_{21} - R_{11}}{3} = \frac{15}{4} a^5 + a$$

### Pregunta 3

Si  $y' = 2x + 3y$   
 $y(1) = 2$   $h = 0.1$ , Obtener  $y(1.1)$  usando Taylor de orden 3.

### Solución

$$y' = 2x + 3y$$

$$y'' = 2 + 3y'$$

$$y'' = 2 + 6x + 9y$$

$$y''' = 6 + 9y'$$

$$y''' = 6 + 18x + 27y$$

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 2 \quad h = 0.1$$

$$x_1 = x_0 + h = 1.1$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h^2}{2}(2 + 6x_0 + 9y_0) + \frac{h^3}{6}(6 + 18x_0 + 27y_0) = 2.943$$

### Pregunta 4

$$y'' = 2xy' + x^2y + \text{sen}(x) \quad y'(1) = -2 \quad y(1) = 1$$

Escriba un programa en MATLAB que realice 05 pasos de Euler ( $h=0.1$ ).

### Solución

$$y' = z \quad y(1) = 1$$

$$z' = 2xz + x^2y + \text{sen}(x) \quad z(1) = -2$$

$$x(1)=1; y(1)=1; z(1)=-2; h=0.5;$$

for i=1:5

$$x(i+1)=x(i)+h;$$

$$y(i+1)=y(i)+h*z(i);$$

$$z(i+1)=z(i)+h*(2*x(i)*z(i)+x(i)^2*y(i)+\text{sin}(x(i)));$$

end

### Pregunta 5

Dada la siguiente integral

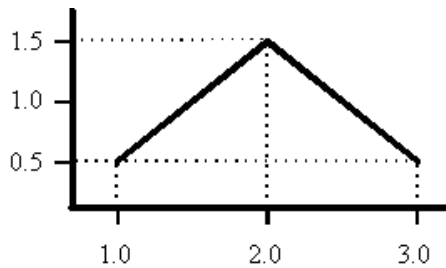
$$\int_1^4 \frac{1}{x} dx$$

Averiguar cuántas particiones serán necesarias usando la fórmula del trapecio compuesto para garantizar un error menor que 0.01.

- a) 20      b) 18      **c) 22**      d) 21      e) 15

### Pregunta 6

Calcule numéricamente la integral de la figura adjunta empleando la regla del trapecio y la regla de Simpson. ¿Qué método es más exacto en este caso? ¿Por qué?



### Solución

$$I_T = \frac{1}{2}(f(1) + 2 * f(2) + f(3)) = \frac{1}{2}(0.5 + 2 * 1.5 + 0.5) = 2$$

$$I_S = \frac{1}{3}(f(1) + 4 * f(2) + f(3)) = \frac{1}{3}(0.5 + 4 * 1.5 + 0.5) = \frac{7}{3}$$

El trapecio da resultados exactos al integrar cualquier polinomio de grado 1.

### Pregunta 7

Determinar los coeficientes A, B y C de modo que la fórmula :

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \underbrace{Af(0) + Bf\left(\frac{1}{2}\right) + Cf(1)}_{\text{fórmula}}$$

Sea exacta para polinomio de grado menor o igual a 2.

### Solución

$$f(x) = 1 \quad \int_0^1 1 dx = 1 = A + B + C$$

$$f(x) = x \quad \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = A(0) + B\left(\frac{1}{2}\right) + C(1)$$

$$f(x) = x^2 \quad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = A(0)^2 + B\left(\frac{1}{2}\right)^2 + C(1)^2$$

$$A = 1/6 \quad B = 2/3 \quad C = 1/6$$

### Pregunta 8

Hallar  $\int_0^1 e^{x^2} \sin x dx$  , usando el método Romberg usando los pasos de 1 y 0.5

### Solución

$$T_1 = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = 1.1437$$

$$T_2 = \frac{1/2}{2}(f(0) + 2f(0.5) + f(1)) = 0.8796$$

$$I = \frac{4T_2 - T_1}{3} = 0.7916$$

### Pregunta 9

Considere el problema de valor inicial:

$$y' = (y - x - 1)^2 + 2$$

$$y(0) = 1$$

- Muestre que  $y(x) = 1 + x + \tan x$  es solución exacta del problema dado
- Obtener una aproximación para  $y(0.1)$  usando Runge Kutta de orden 2 con  $h=0.1$

### Solución

a)

$$(1 + x + \tan x)' = 1 + 1 + \tan^2 x = (1 + x + \tan x - x - 1)^2 + 2 = 2 + \tan^2 x$$

b)

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 1 \quad h = 0.1$$

$$x_1 = x_0 + h$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.2$$

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0.201$$

$$y_1 = y_0 + 1/2(k_1 + k_2) = 1.2005$$

### Pregunta 10

Considere el siguiente P.V.I

$$\begin{cases} t^2 y'' - 2ty' + 2y = t^3 \ln t, & 1 \leq t \leq 1.5 \\ y(1) = 1, & y'(1) = 0 \end{cases}$$

obtener  $y(1.2)$  usando Euler con  $h = 0.1$  .t

$$y(1.2) = \dots\dots\dots$$

### Solución

$$y'' = t \ln(t) + \frac{2y'}{t} - \frac{2y}{t^2}$$

$$y' = z$$

$$z' = t \ln(t) + \frac{2z}{t} - \frac{2y}{t^2}$$

$$t_0 = 1 \quad y_0 = 1 \quad z_0 = 0$$

$$t_1 = t_0 + h = 1.1$$

$$y_1 = y_0 + h z_0 = 1$$

$$z_1 = z_0 + h \left( t_0 \ln(t_0) + \frac{2z_0}{t_0} - \frac{2y_0}{t_0^2} \right) = -0.20$$

$$t_2 = t_1 + h = 1.2$$

$$y_2 = y_1 + h z_1 = 0.98$$

$$z_2 = z_1 + h \left( t_1 \ln(t_1) + \frac{2z_1}{t_1} - \frac{2y_1}{t_1^2} \right) = -0.3912$$

$$y(1.2) = \dots\dots 0.98 \dots\dots$$

Los Profesores