Universidad Nacional de Ingeniería **03-03-07**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2006-3**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

SOLUCIONARIO TERCERA PRÁCTICA
CALIFICADA CALCULO NUMERICO (MB-535)

Solo se permite el uso de una hoja de formulario

Problema 1

Sea el sistema de Ecuaciones No Lineales :

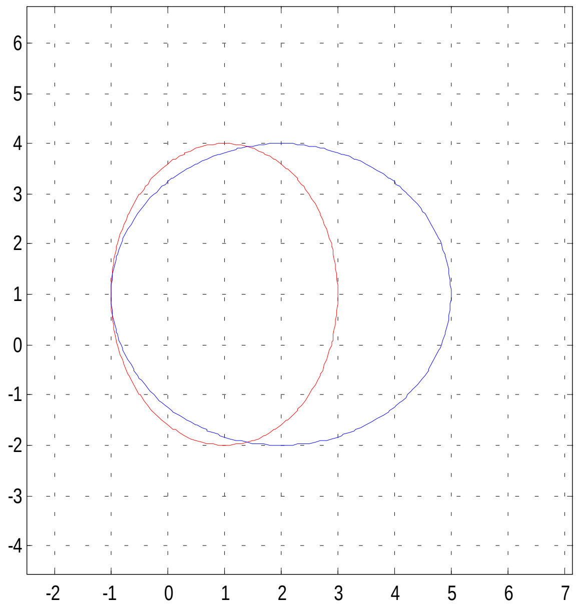
$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=9$$

a) Localice gráficamente las raíces e indique aproximaciones iniciales para cada una de ellas.
b) Aproxime la raíz del primer cuadrante utilizando Newton-Rapshon para sistemas usando como aproximación inicial la obtenida en a). Haga 02 iteraciones.
c) Cuál es la precisión de la aproximación obtenida en b)?

Solución

a)



Raíces aproximadas: (1.5,4), (1.5,-2), (-1,1)

b)

$$\begin{bmatrix}-f_1\\-f_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{1x} & f_{1y}\\ f_{2x} & f_{2y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}$$

$$f_1 = \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} - 1 \quad f_{1x} = \frac{x-1}{2} \quad f_{1y} = \frac{2(y-1)}{9}$$
$$f_2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 9 \quad f_{2x} = 2(x-2) \quad f_{2y} = 2(y-1)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$
$$y_{n+1} = y_n + \Delta y$$
$$err = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

x	y	err
1.5	4	-----------------------
1.40384615384615	3.94230769230769	0.11213369028549
1.40000614401573	3.93939289896347	0.00482096419166

c) Error estimados de 0.00482096419166

Problema 2
Disponemos de los siguientes datos sacados de un polinomio p(x) de grado g $\leq$ 5.

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-5	1	1	1	7	25

(a) ¿Podríamos averiguar de qué grado es?
(b) Hallar p(1/2) y obtener el error

Solución

a)Tabla de diferencias divididas

i	xi	F(xi)	F[,]	F[,,]	F[,,,]	F[,,,,,]	F[,,,,,,]
0	-2	-5					
			6				
1	-1	1		-3			
			0		1		
2	0	1		0		0	
			0		1		0
3	1	1		3		0	
			6		1		
4	2	7		6			
			18				
5	3	25					

$$P(x) = -5 + 6(x+2) - 3(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)x = x^3 - x + 5$$
Grado = 3
b)
$$f(1/2) \approx P(1/2) = 0.625$$
$$Error = 0$$

Problema 3

Sea la función $f(x)=sen\left(\frac{\pi\ x}{2}\right)$:

a) Construya los polinomios cúbicos usando splines naturales en x=0, 1, 2, 3 y 4.
b) Aproxime f(1.5) y obtener el error.
c) Aproxime f'(2.5) y obtener el error.

Solución

a)

i	x_i	$f(x_i)$	h_i	$F[x_i,x_{i+1}]$
0	0	0	1	1
1	1	1	1	-1
2	2	0	1	-1
3	3	-1	1	1
4	4	0		

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}=6\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$S(x)=\begin{cases} 0\le x\le 1 & -0.5x^3+1.5x \\ 1\le x\le 2 & 0.5(x-1)^3-1.5(x-1)^2+1 \\ 2\le x\le 3 & 0.5(x-2)^3-1.5(x-2) \\ 3\le x\le 4 & -0.5(x-3)^3+1.5(x-3)^2-1 \end{cases}$$

b)

$$S(1.5)=0.5(1.5-1)^3-1.5(1.5-1)^2+1=0.6875$$
$$f(1.5)=0.7071$$
$$err=0.0196$$

c)

$$S'(2.5)=1.5(2.5-2)^2-1.5=-1.1250$$
$$f'(2.5)=-1.1107$$
$$err=0.0143$$

Problema 4

a) Deduzca una fórmula de aproximación de la segunda derivada de la forma:

$$f''(x_i)\approx\left[\frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2}\right]$$

Obtenida a partir del polinomio interpolante de Lagrange, que pasa por los puntos $\{(x_{i-1},f(x_{i-1})),(x_i,f(x_i)),(x_{i+1},f(x_{i+1}))\}$ donde $x_{i+1}-x_i=x_i-x_{i-1}=h$

b) Tabule $f(x)=e^{x^2}sen(2x)$, en x=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4. Utilice la fórmula deducida en (a) para hallar f ''(0.1).
c) Determine el error cometido.

Solución

a) Polinomio interpolante de Lagrange:

$$P_2(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} f(x_{i-1}) + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} f(x_i) +$$
$$+ \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} f(x_{i+1})$$

$$P_2''(x) = \frac{2}{(-h)(-2h)} f(x_{i-1}) + \frac{2}{(h)(-h)} f(x_i) + \frac{2}{(2h)(h)} f(x_{i+1})$$

$$f''(x_i) \approx P_2''(x_i) = \left[\frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} \right]$$

b)

$$f''(0.1) \approx \left[\frac{f(0.2) - 2f(0.1) + f(0)}{0.1^2} \right] \approx 0.39788248$$

c)

$$f''(0.1) = 0.39862778$$
$$error = 0.00074530$$

Los Profesores