Universidad Nacional de Ingeniería **10-02-07**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2006-3**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

SOLUCIONARIO DE LA SEGUNDA PRÁCTICA DE CALCULO NUMERICO
PARTE B

Apellidos y Nombres	Código	Sección	Nota

SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO.

Marque la alternativa que considere correcta o complete según el caso:

Pregunta 1

Sea : $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Se desea resolver usando el siguiente método iterativo:

$$x^{(K+1)} = (D-U)^{-1} L * x^{(K)} + (D-U)^{-1} b$$

$$A = D - L - U$$

Demuestre sin realizar iteraciones si habrá convergencia o no.

Solución

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(T) = 0.5 < 1$$

Por lo tanto habrá convergencia!!

Pregunta 2

Dada la matriz definida positiva $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 2 & c \\ 0 & c & q \end{pmatrix}$.Probar que los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel convergen o divergen exactamente para los mismos valores de *b* y *c*

Solución

$$Tj = \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 \\ -b/2 & 0 & -c/2 \\ 0 & -c/q & 0 \end{bmatrix} \quad \rho(Tj) = \frac{1}{\sqrt{2q}}\sqrt{c^2 + b^2 q}$$

$$Tg = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 \\ 0 & b^2/2 & -c/2 \\ 0 & -b^2c/2q & c^2/2q \end{bmatrix} \quad \rho(Tg) = \frac{c^2 + b^2 q}{2q}$$

$$\rho(Tg) = [\rho(Tj)]^2$$
$$\rho(Tg) < \rho(Tj) < 1$$
$$o \quad \rho(Tg) \geq \rho(Tj) \geq 1$$

Ambos métodos convergen o divergen simultáneamente

Pregunta 3

Sea: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Escriba un programa en MATLAB que obtenga el ***w*** optimo y obtenga el vector solución usando el método SOR partiendo de $(0,0)^T$ con una precisión de 0.0001.

Solución

```
A=[1 2;-2 1]
b=[-1 3]’
D=diag(diag(A))
L=D-tril(A)
U=D-triu(A)
Tj=inv(D)*(L+U)
Rhoj=max(abs(eig(Tj)))
w=2/(1+sqrt(1-Rhoj^2))
Tw=inv(D-w*L)*((1-w)*D+w*U)
Cw= inv(D-w*L)*w*b
X=zeros(size(b))
for i=1:100
   XN=Tw*X+Cw;
   Err=norm(XN-X,2);
   X=XN;
   if Err<0.0001
      break
   end
end
```

Pregunta 4

Sea: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Obtenga el valor propio inferior usando el método de la potencia inversa partiendo de $x^{(0)}=[1\ \ 1]^T$, realice 04 iteraciones y estime el error.

Solución

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = Bx_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_1 = 1 \quad x_1 = \frac{y_1}{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \frac{1}{u_1} = 1$$

$$y_2 = Bx_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad u_2 = 1 \quad x_2 = \frac{y_2}{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = \frac{1}{u_2} = 1$$

$$y_3 = Bx_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad u_3 = 3 \quad x_3 = \frac{y_3}{u_3} = \begin{bmatrix} -0.6667 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = \frac{1}{u_3} = 0.3333$$

$$y_4 = Bx_3 = \begin{bmatrix} 1.6667 \\ -2.3333 \end{bmatrix} \quad u_4 = -2.3333 \quad x_4 = \frac{y_4}{u_4} = \begin{bmatrix} -0.7143 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_4 = \frac{1}{u_4} = -0.4286$$

$$\varepsilon_4 \approx \|x_4 - x_3\|_\infty = 0.0476$$

Pregunta 5

Sea: $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{bmatrix}$

Para que valores de ***a*** dicha matriz no es diagonalizable. ***a*** Real o Complejo?

Solución

Cuando todos los valores propios son diferentes la diagonalizacion esta garantizada, en este caso para que la matriz no sea diagonalizable debemos tener un valor propio con multiplicidad 2.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) - a^2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - a^2$$

Para raíces iguales el discriminante debe ser nulo.

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2 - a^2) = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{i}{2}$$

$$P(\lambda) = \left(\lambda - \tfrac{3}{2}\right)^2$$

$$ma\left(\lambda = \tfrac{3}{2}\right) = 2$$

$$mg\left(\lambda = \tfrac{3}{2}\right) = 1$$

Dado que $ma \neq mg$, se verifica que la matriz no es diagonalizable.

Pregunta 6

Averiguar si la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonizable, justifique.

Solución

$$P(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda = -\lambda^2(\lambda - 3)$$

$$ma(\lambda = 0) = 2 \quad mg(\lambda = 0) = 3 - rango(A) = 3 - 1 = 2$$
$$ma(\lambda = 3) = 1 \quad mg(\lambda = 3) = 3 - rango(A - 3I) = 3 - 2 = 1$$

Dado que $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i) \quad \forall i$, la matriz es diagonalizable.

Pregunta 7

Escriba la función ***localiza*** que permite ubicar intervalos que contengan raíces de una función ***'fun'*** en el intervalo ***[a,b]*** con ***'n'*** particiones iguales y debe retornar una matriz de mx2, con los 'm' intervalos que contienen las raíces.

función z=localiza(fun,a,b,n)

Ejm. a=-5 b=5 n=10 $z = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Solución

```
función z=localiza(fun,a,b,n)
z=[];
x=a:(b-a)/n:b;
y=feval(fun,x);
for i=1:length(x)-1
    if y(i)*y(i+1)<0
        z=[z; x(i) x(i+1)];
    end
end
```

Pregunta 8

Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, demostrar, mediante algún método de localización, que $\lambda = 13$ no es valor propio.

Solución

Por Gershegorin:

$|z-1| \le |2| + |3| = 5$

$|z-3| \le |2| + |4| = 6$

$|z-5| \le |3| + |4| = 7$

Dado que la matriz es simétrica, z es real,

$-4 \le z \le 12$

Por lo tanto $\lambda = 13$ no puede ser un valor propio.

Pregunta 9

El método de Newton para resolver cierta ecuación $f(x) = 0$ viene dado por

$$\begin{cases} x_0 & \text{arbitrario} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{2x_n - 1} & n \ge 0 \end{cases}$$

Determinar la función $f(x) = 0$

Solución

$$f(x) = x^2 - x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\ 2} - x_n}{2x_n - 1} = \frac{x_n^{\ 2}}{2x_n - 1}$$

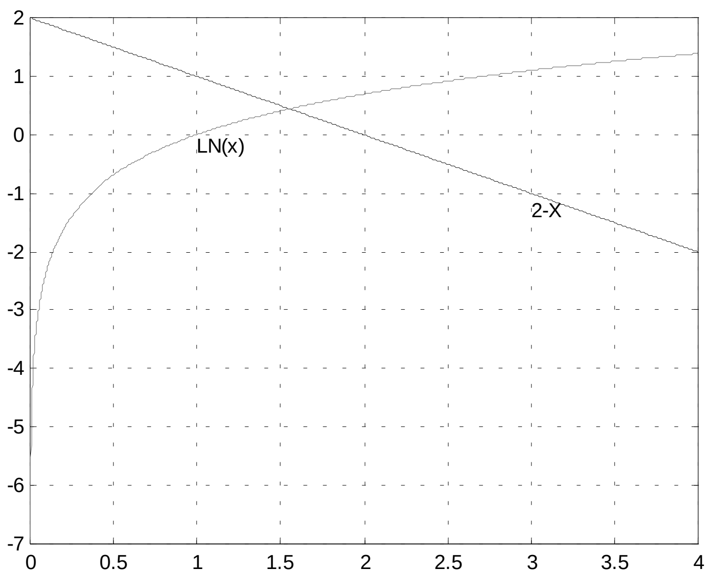
Pregunta 10

Dada la función $f(x) = x - 2 + \ln x$

(a) Localizar gráficamente las raíces de ecuación

(b) Realizar una iteración utilizando el método de Newton tomando $x_0 = 1.5$

Solución



$$f(x) = x - 2 + Ln(x)$$

$$f'(x) = 1 + 1/x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 1.5567$$

Los Profesores