Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

23-09-06
P.A. 2006-2

SOLUCIONARIO DE LA PRIMERA PRÁCTICA CALIFICADA DE CALCULO NUMERICO (PARTE A) (50 minutos - 10 Puntos)

APELLIDOS Y NOMBRE	SECCION	NOTA

1. Muestre el valor final de **s** en el siguiente fragmento de Programa:

```
n=272013;
s=0;
while n~=0
  k=rem(n,10);
  if rem(k,2)==1
     s=s+k;
  end
  n=fix(n/10);
end
disp(s)
```

Solución

11

2. Muestre los valores de α para los cuales el siguiente sistema es incompatible (inconsistente) :

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 8 & 10 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+3 \\ 2\alpha+3 \\ 7\alpha-3 \end{bmatrix}$$

Solución

$\alpha \neq 6$

3. Elaborar una función llamada **evalua.m** para construir la siguiente matriz cuadrada A. El argumento de entrada debe ser **n** y el argumento de salida la matriz **A**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 4 & 6 & .. & .. \\ 4 & 7 & 10 & .. & .. \\ 7 & 11 & 15 & \mathrm{O} & \\ : & : & : & & \mathrm{O} \end{bmatrix}$$

Solución

```
function A=evalua(n)
for i=1:1:n
 for j=1:1:n
     if (i==1) A(i,j)=j;
     else
         if (j==1) A(i,j)=A(i-1,2);
         else A(i,j)=A(i,j-1)+i;
         end
     end
 end
end
```

4. Mediante un programa en Matlab determine el número de términos necesarios para aproximar cos(x) con 9 cifras decimales exactas, usando la aproximación de Taylor, para x=π/5:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots\ldots$$

Solución

```
cde=9;   % cifras decimales exactas
s=0;
nt=1;     %Numero de términos
error=1;
x=pi/5;
while (abs(error)>(0.5*10^-cde))
     error=((-1)^(nt+1))*(x^(2*(nt-1)))/factorial(2*(nt-1));
     s=s+error;
     nt=nt+1;
 end
 disp('El numero de términos necesarios es:);
 nt-1
```

5. Escriba los comandos en MATLAB para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + b + c + d = e$$
$$2b = 15 - c$$
$$c + d + 3c = 18$$
$$a + 4b + c = 15e$$
$$5a + 3b + 4c - 2d + 5e = 18$$

Solución

```
A=[ 1 1 1 1 -1
   0 2 1 0 0
   0 0 4 1 0
   1 4 1 0 -15
   5 3 4 -2 5];
b=[0 15 18 0 18]';
x=A\b
```

6. Muestre el valor de T al final del siguiente fragmento de programa:

```
n=4;
r=n:-1:1;
c=r';
T=zeros(4,4);
t=n;
for i=1:4
   T(i,i:end)=r(1:t);
   T(i:end,i)=c(1:t);
     t=t-1;
end
```

Solución

$$T=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Se pretende calcular el área de un círculo de radio aproximadamente de 25 cm., con error absoluto, que en módulo, no exceda a 0.05 cm^2. Con qué precisión absoluta se debe medir el radio del círculo y cuántas cifras decimales en el valor aproximado de π?

Solución

A= πr^2 $\quad \varepsilon_A \leq 0.05$

ε_r =? $\quad \varepsilon_\pi$ =?

Principio de igual efecto

$$\frac{\varepsilon_A}{2} = \frac{\partial A}{\partial r}\varepsilon_r = \frac{\partial A}{\partial \pi}\varepsilon_\pi$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_A}{2\dfrac{\partial A}{\partial r}} \qquad \varepsilon_\pi = \frac{\varepsilon_A}{2\dfrac{\partial A}{\partial \pi}}$$

$$\left|\frac{\partial A}{\partial r}\right| = |2\pi r| = 157.07963 \qquad \left|\frac{\partial A}{\partial \pi}\right| = |r^2| = 25^2$$

$$\varepsilon_r = \frac{0.05}{2(157.07963)} = 0.16x10^{-3} \qquad \varepsilon_\pi = \frac{0.05}{2(25^2)} = 0.4x10^{-4} \text{(con 4 c.d.e)}$$

8. Considere el sistema de punto flotante de la forma $x = \pm(0.b_1 b_2 b_3 \mathrm{K}\ b_p) \times B^e$ donde
$B = 10, \quad -2 \le e \le 1, \quad p = 2$
Obtener la representación de:

$x_1 = 12.3$ K K K K K

$x_2 = 0.01354 \times 10^{-9}$ K K K K K

$x_3 = 0.003325$ K K K K K

Solución

Obtener la representación de:
$x_1 = 12.3$ K K K **overflow** K K
$x_2 = 0.01354 \times 10^{-9}$ K K **underflow** K K K
$x_3 = 0.003325$ K K K K K $\mathbf{0.33 \times 10^{-2}}$

9. Calcular ***x*** e ***y*** a partir del sistema:

$$x + \alpha y = 1$$
$$\alpha x + y = 0$$

a) Resolver mediante Eliminación Gaussiana.
b) Muestre las matrices L y U de Doolite.

Solución

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

m21=α

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Sustitución inversa
$x_2 = -\alpha/(1-\alpha^2)$
$x_1 = 1+\alpha^2/(1-\alpha^2)$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1-\alpha^2 \end{bmatrix}$$

10. Considera las siguientes líneas con instrucciones en MATLAB:

```
A = [2 1 1; 1 1 1;-1 -1 -1];
b = [4 -3 3]';
A = [A b];       % punto 1
aux=A(1,:); A(1,:)=A(2,:); A(2,:)=aux;   % punto 2
A(2,:)=A(2,:)-2*A(1,:);
A(3,:)=A(3,:)+A(1,:)   % punto 3
```

Muestre la matriz A tras la ejecución de los puntos 1, 2 y 3.

Solución

Punto 1 :

A =

```
   1    1    1   -3
   0   -1   -1   10
   0    0    0    0
```

Punto 2 :

A=

```
  1   1   1   -3
  2   1   1    4
 -1  –1  –1    3
```

Punto 3 :

A=

```
  1   1   1   -3
  0  -1  –1   10
  0   0   0    0
```

SOLUCIONARIO DE LA PRIMERA PRÁCTICA CALIFICADA DE CALCULO NUMERICO (PARTE B) (70 minutos - 10 Puntos)

Problema 1

a. El punto de impacto de un proyectil que es lanzado desde un avión puede ser calculado por la siguiente expresión:

$$x_0 = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Si $v = 300 \pm 0.5 \quad ms^{-1} \quad g = 9.8ms^{-2}$ con una precisión de 0.05 y $h = 300 \pm 1 \quad m$. ¿Cuáles son los limites de variación de x_0?

Solución

$v = 300 \quad \xi_v = 0.5 \quad g = 9.8 \quad \xi_g = 0.05 \quad h = 300 \quad \xi_h = 1$

$x = 2347.4$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 7.8247$$

$$\frac{\partial x}{\partial h} = v\sqrt{\frac{1}{2hg}} = 3.9123$$

$$\frac{\partial x}{\partial g} = -v\sqrt{\frac{h}{2g^3}} = \text{-}119.7644$$

$$\xi_x = \left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|\xi_v + \left|\frac{\partial x}{\partial h}\right|\xi_h + \left|\frac{\partial x}{\partial g}\right|\xi_g = 7.8447 * 0.5 + 3.9123 * 1 + 119.7644 * 0.05 = 13.8229$$

Variación de $x = 2347.4 \pm 13.8229$

b. La posición de una partícula esta dada por la siguiente función $y(t) = \sqrt{1-t}$ donde t está representado con 2 cifras decimales exactas. Determine el número de cifras decimales exactas que garantice la posición y(t) cuando t = 0.50s

Solución

$$y(t)=\sqrt{1-t}$$
$$t=0.50\ (2\ c.d.e.)$$
$$\varepsilon_t=0.5x10^{-2}$$
$$\varepsilon_y=\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|\varepsilon_t$$
$$\varepsilon_y=\left|\frac{t}{2\sqrt{1-t}}\right|\varepsilon_t$$
$$\varepsilon_y=|0.707|\times 0.5\times 10^{-2}$$
$$\varepsilon_y\approx 0.00354=0.354\times 10^{-2}\leq 0.5\times 10^{-n}$$
$$n=2\quad c.d.e$$

Problema 2

Para una representación estándar en simple precisión (IEEE-754) obtener:

a) La representación del numero decimal 0.3.

Solución

$$0.3_{10}=0.01001100110011...._2=1.00110011001100110011001x2^{-2}$$
$$\exp onente=-2+127=01111101$$
$$x=0\quad 01111101\quad 00110011001100110011001$$
$$xx=2^{-2}+2^{-5}+2^{-6}+2^{-9}+2^{-10}+.......+2^{-25}$$

b) Muestre el número siguiente al decimal 0.3 que tiene representación exacta. Muéstrelo como se guarda en el computador y en su forma decimal.

Solución

$$xs=1.00110011001100110011010x2^{-2}$$
$$\exp onente=-2+127=01111101$$
$$x=0\quad 01111101\quad 00110011001100110011010$$
$$xx=2^{-2}+2^{-5}+2^{-6}+2^{-9}+2^{-10}+.......+2^{-24}$$

c) Obtener el mayor valor positivo subnormal en este sistema.

Solución

Mayor valor positivo “subnormal”

$$r=0.11111111111111111111111x2^{-126}$$
$$\exp onente=00000000$$
$$0\quad 00000000\quad 11111111111111111111111$$

Problema 3

Resolver usando aritmética de 5 dígitos significativos el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 0.0001 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Use Eliminación Gaussiana con y sin pivoteo parcial.

¿Por sus resultados, podría concluir si el sistema está bien condicionado?

Solución

$$AA = \begin{bmatrix} 0.0001 & 1 & 1 & 2.0001 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad AA\text{=[A b]}$$

m21 = 3/0.0001= $0.3\text{x}10^5$

m31=1/0.0001= $0.1\ \text{x}10^5$

$$AA = \begin{bmatrix} 0.1x10^{-3} & 1 & 1 & 0.20001x10^1 \\ 0 & -0.29999x10^5 & -0.29999x10^5 & -0.6x10^5 \\ 0 & -0.9998 & -0.9997 & -0.19998x10^1 \end{bmatrix}$$

m32=-0.9998/(-0.29999x10^5)= 0.33328

$$AA = \begin{bmatrix} 0.1x10^{-3} & 1 & 1 & 0.20001x10^1 \\ 0 & -0.29999x10^5 & -0.29999x10^5 & -0.6x10^5 \\ 0 & \approx 0 & 0.10667x10^1 & -0.12x10^1 \end{bmatrix} ==[U\ c]$$

Sustitución inversa

x_3=-0.12x10/(0.10667x10)= -0.11250x10^1=-1.1250

x_2=(-0.6x10^5-(-0.29999x10^5*(-1.1250)))/(-0.29999x10^5) = 0.31251x10 = 3.1251

x_1=(0.20001x10-(-1.1250-3.1251))/(0.1x10^{-3})=0

Empleando Pivoteo Parcial

$$AA = \begin{bmatrix} 0.0001 & 1 & 1 & 2.0001 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Intercambio de filas   f2 con f1

$$AA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0.0001 & 1 & 1 & 2.0001 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

m21 = 0.0001/3= 0.33333x10^{-4}

m31=1/3= 0.33333

$$AA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ \approx 0 & 0.99997 & 0.99997 & 2.0000 \\ \approx 0 & 1.6667 & 1.6667 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

Intercambio de filas f3 con f2

$$AA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ \approx 0 & 1.6667 & 1.6667 & 2.0000 \\ \approx 0 & 0.99997 & 0.99997 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

m32=0.99997/(1.6667)= 0.59997

$$AA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ \approx 0 & 1.6667 & 2.6667 & 2.0000 \\ \approx 0 & \approx 0 & -0.59997 & 0.80006 \end{bmatrix}$$

Sustitución inversa

x_3=0.80006/(-0.59997)= -1.3335

x_2=(2.0000-2.6667*(-1.3335))/(1.6667) = = 3.3336

x_1=(3-(-1.3335+3.3336))/3=0.33330

Resultados

Solución exacta	Solución sin pivoteo	Solución con pivoteo
0.3333 3.3335 -1.3334	0 3.1251 -1.1250	0.3333 3.3335 -1.3335

Los resultados demuestran que para la precisión de 5 dígitos la matriz esta bien condicionada. Se minimizan los problemas de redondeo con el pivoteo.

Los Profesores