Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2006-II**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades **27-10-2006**

Solucionario del Examen Parcial de Cálculo Numérico (MB535)

Sólo se permite el uso de una hoja de formulario

Pregunta 1

A) Para la matriz A_{nxn}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

¿Encuentre el espectro de A, para cualquier valor de n?
Para n=5, Encontrar el valor propio dominante y el respectivo vector propio usando el método de la potencia con un vector arbitrario diferente del nulo normalizado con la norma infinita. Explique como es la convergencia del método.

Solución

Para un sistema de orden 2

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda-2) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\lambda_1=2,\ \lambda_2=0}$$

Para un sistema de orden 3

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-1\right) - \left((1-\lambda)-1\right) + (1-(1-\lambda)) = 0$$
$$= (1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) + 2 = \lambda^2(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

Por lo tanto para una matriz de orden n

$$|A-\lambda I| = \lambda^{n-1}(\lambda-n) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = n, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$$

Para el caso de n=5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{vector arbitrario } x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

B) Demuestre que la siguiente sucesión converge a $\sqrt{R}$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n^{\ 2} + 3R\right)}{3x_n^{\ 2} + R}$$

Realice 03 iteraciones a partir de $x_0 = 1.5$, para estimar $\sqrt{3}$ y comente sus resultados.

Solución

Sea: $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = s$, el valor al cual debe converger.

$$s = \frac{s\left(s^2 + 3R\right)}{3s^2 + R}$$

$$3s^3 + sR = s^3 + 3sR$$

$$2s^3 = 2sR$$

$$s^2 = R$$

$$s = \sqrt{R}$$

Aplicando el algoritmo:
$x_1 =$ 1.73076923076923
$x_2 =$ 1.73205080739327
$x_3 =$ 1.73205080756888

Donde las 14 cifras decimales son exactas comparadas con $\sqrt{3}$, la convergencia es rapidísima.

C) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 1 \\ 4x_1 + 9x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Indicar la alternativa que corresponda:

a) La convergencia está asegurada para los dos métodos.
b) La convergencia sólo está asegurada para el método de Gauss-Seidel.
c) La convergencia sólo está asegurada para el método de Jacobi.
d) No se puede asegurar la convergencia para ninguno de los dos métodos.

Sustente su respuesta.

Solución

A =

2	4
4	9

(Matriz de Iteración de Jacobi)
TJ =

0	-2
-4/9	0

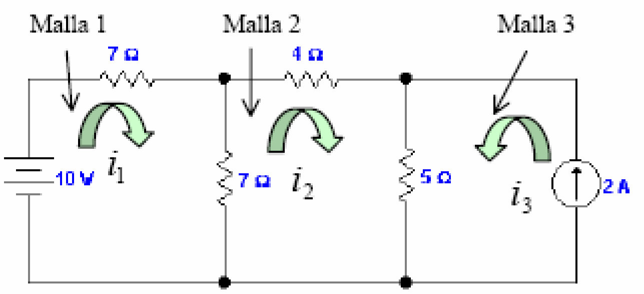
rhoJac = 0.9428
(Matriz de Iteración de Gauss-Seidel)
TGS=

0	-2
0	8/9

rhoGS =0.8889
La convergencia está asegurada para los dos métodos.

Clave: a

Pregunta 2
Dado el siguiente circuito eléctrico:



a) Determinar el sistema de ecuaciones de las corrientes de malla del circuito.
b) Resolver el sistema obtenido en a) utilizando el método de Crout.
c) Determine si es posible aplicar el método de Cholesky para resolver el sistema, y en caso que así sea resuélvalo.

Solución

a) Malla 1: $-10+7i_1+7(i_1-i_2)=0$

Malla 2: $7(i_2-i_1)+4i_2+5(i_2+i_3)=0$

Malla 3: $i_3=2$

El sistema para resolver será

$$\begin{bmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -7 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b) Utilizando Crout tenemos

$$\begin{bmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -7 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ -7 & 25/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ -7 & 25/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sea:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ -7 & 25/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/7 \\ 2/5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/7 \\ 2/5 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/35 \\ -2/5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c) No es posible aplicar el método de Cholesky, dado que la matriz no es simétrica.

NOTA.-

Si reemplazamos $i_3 = 2$, en la segunda ecuaciones podemos reducir el orden del sistema:

$$\begin{bmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Aplicando factorización de Crout:

$$A = LU \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ -7 & 25/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L\,z = b \quad \Rightarrow z = \begin{bmatrix} 5/7 \\ -2/5 \end{bmatrix}$$

$$U\,x = z \quad \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 18/35 \\ -2/5 \end{bmatrix}$$

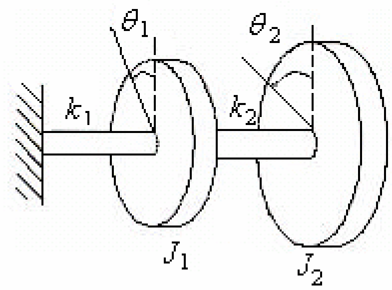
Dado que A es simetrica y definida positiva se aplicar Cholesky:

$$A = LL^T \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{14} & 0 \\ -7/\sqrt{14} & 5/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{14} & -7/\sqrt{14} \\ 0 & 5/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$L\ z = b \quad \Rightarrow z = \begin{bmatrix} 10/\sqrt{14} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$L^T\ x = z \quad \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 18/35 \\ -2/5 \end{bmatrix}$$

Pregunta 3
Se pretende hacer un estudio de las frecuencias naturales y las formas de los modos (vectores modales o propios) del siguiente sistema:



$k_2 = 2k_1 \quad J_2 = 2J_1$
Ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 + (k_1 + k_2)\theta_1 - k_2\theta_2 &= 0 \\ J_2\ddot{\theta}_2 - k_2\theta_1 + k_2\theta_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

La forma matricial de la ec. (1) es : $\mathbf{J}\,\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ (2)

La solución de (2) es: $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{x}e^{jwt}$, donde x es el vector propio **y** ω es la frecuencia. Reemplazando en la ec. (2) queda: $(-\omega^2\mathbf{J} + \mathbf{K})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde $\lambda = \omega^2$.

Se pide:

a) Encuentre las frecuencias del sistema y los modos del sistema en forma analítica.
b) Utilice el método de la potencia y encuentre una aproximación del modo correspondiente a la menor frecuencia del sistema, inicie con un vector inicial $x^{(0)} = [1 \quad 1]^t$, con una tolerancia de $0.5*10^{-3}$.

Solución

$\mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x} = \omega^2\mathbf{x}$ =➔ $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

$$A = \frac{k_1}{J_1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) det(A-λI)x=0 λ1=k1/J1*3.732 λ2=k1/J1*0.268
ω1=1.932$\sqrt{k_1/J_1}$ ω2= 0.5176$\sqrt{k_1/J_1}$

Modos

x1=0.732050807568877	x2= 1
1	-0.366025403784439

b) $B = A^{-1} = \frac{J_1}{k_1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Potencia inversa

x1	x2	1/u
1	1	
0.75	1	$0.25 k_1 / J_1$
0.733333333333333	1	$0.26666 k_1 / J_1$
0.732142857142857	1	$0.267857 k_1 / J_1$
0.732057416267943	1	$0.267857 k_1 / J_1$

ω= $\sqrt{1/u} = \sqrt{1/0.267857} = 0.5176\sqrt{k_1 / J_1}$

Pregunta 4

El desplazamiento x (metros) de una masa que experimenta una oscilación amortiguada varia con el tiempo t (segundos) según el modelo:

$$x = -0.1\, e^{\beta t}\left[\cos(\omega t) - (\beta / \omega)\text{sen}(\omega t)\right]$$

Donde β y ω tienen unidades de seg^{-1}. Al realizar mediciones se obtiene un desplazamiento x de 0.0162 metros en un instante t de 0.41 segundos, $\omega = 7.5\, seg^{-1}$. Determine el parámetro β.

a) Localice la raiz o raices
b) Realice 03 iteraciones del método de bisección y muestre el error.
c) A partir de la aproximación obtenida en b) realice 03 iteraciones de Newton-Raphson y muestre el error.

Solución

a) Tabulando :

$$f(\beta) = 0.0162 + 0.1e^{0.41\beta}\left(\cos(7.5*0.41) - \frac{\beta}{7.5}sen(7.5*0.41)\right)$$

β	$f(\beta)$
-8	0.0127
-7	0.0109
-6	0.0081
-5	0.0039
-4	-0.0025
-3	-0.0122
-2	-0.0270
-1	-0.0494
0	-0.0836

1	-0.1355
2	-0.2144
3	-0.3343
4	-0.5165
5	-0.7933

Se observa que la única raíz debe estar en [-5,-4].

b) Aplicando bisección:

a	x	b	err
-5	-4.5	-4	0.5
-4.5	-4.25	-4	0.25
-4.5	-4.375	-4.25	0.125

Raíz aproximada -4.375 y error es de 0.125

c) Aplicando Newton-Raphson:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{f(\beta_n)}{f'(\beta_n)}$$

x_0=-4.37500000000000
x_1=-4.33776519902844 err_1=0.03723480097156
x_2=-4.33805268463188 err_2= 2.874856034402740e-004
x_3=-4.33805270194987 err_3= 1.731798970894261e-008

Los Profesores