

**Solucionario del Examen Parcial de Cálculo Numérico (MB535)**

**Sólo se permite el uso de una hoja de formulario**

**Pregunta 1**

A) Para la matriz  $A_{n \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ M & M & M & M & \Lambda & M \\ M & M & M & M & & M \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \Lambda & 1 \end{bmatrix}$$

¿Encuentre el espectro de A, para cualquier valor de n?

Para n=5, Encontrar el valor propio dominante y el respectivo vector propio usando el método de la potencia con un vector arbitrario diferente del nulo normalizado con la norma infinita. Explique como es la convergencia del método.

**Solución**

**Para un sistema de orden 2**

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2) = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_1=2, \lambda_2=0}$$

**Para un sistema de orden 3**

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) - ((1-\lambda)-1) + (1-(1-\lambda)) = 0$$

$$= (1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) + 2 = \lambda^2(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

**Por lo tanto para una matriz de orden n**

$$|A - \lambda I| = \lambda^{n-1}(\lambda - n) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = n, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \dots, \lambda_n = 0$$

Para el caso de n=5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{vector arbitrario } x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

B) Demuestre que la siguiente sucesión converge a  $\sqrt{R}$  :

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3R)}{3x_n^2 + R}$$

Realice 03 iteraciones a partir de  $x_0 = 1.5$ , para estimar  $\sqrt{3}$  y comente sus resultados.

### Solución

Sea:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$ , el valor al cual debe converger.

$$s = \frac{s(s^2 + 3R)}{3s^2 + R}$$

$$3s^3 + sR = s^3 + 3sR$$

$$2s^3 = 2sR$$

$$s^2 = R$$

$$s = \sqrt{R}$$

Aplicando el algoritmo:

$$x_1 = 1.73076923076923$$

$$x_2 = 1.73205080739327$$

$$x_3 = 1.73205080756888$$

Donde las 14 cifras decimales son exactas comparadas con  $\sqrt{3}$ , la convergencia es rapidísima.

C) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x_1 + 4x_2 = 1$$

$$4x_1 + 9x_2 = -1$$

Indicar la alternativa que corresponda:

- La convergencia está asegurada para los dos métodos.
- La convergencia sólo está asegurada para el método de Gauss-Seidel.
- La convergencia sólo está asegurada para el método de Jacobi.
- No se puede asegurar la convergencia para ninguno de los dos métodos.

Sustente su respuesta.

### Solución

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

(Matriz de Iteración de Jacobi)

$$TJ = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -4/9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{Jac} = 0.9428$$

(Matriz de Iteración de Gauss-Seidel)

$$TGS = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 8/9 \end{bmatrix}$$

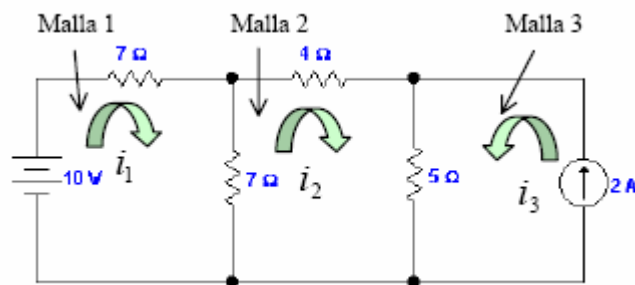
$$\rho_{GS} = 0.8889$$

La convergencia está asegurada para los dos métodos.

**Clave: a**

### Pregunta 2

Dado el siguiente circuito eléctrico:



- Determinar el sistema de ecuaciones de las corrientes de malla del circuito.
- Resolver el sistema obtenido en a) utilizando el método de Crout.
- Determine si es posible aplicar el método de Cholesky para resolver el sistema, y en caso que así sea resuélvalo.

### Solución

a) Malla 1:  $-10 + 7i_1 + 7(i_1 - i_2) = 0$

Malla 2:  $7(i_2 - i_1) + 4i_2 + 5(i_2 + i_3) = 0$

Malla 3:  $i_3 = 2$

El sistema para resolver será

$$\begin{bmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -7 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b) Utilizando Crout tenemos

$$\begin{bmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -7 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ -7 & 25/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ -7 & 25/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sea:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ -7 & 25/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/7 \\ 2/5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/7 \\ 2/5 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/35 \\ -2/5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c) No es posible aplicar el método de Cholesky, dado que la matriz no es simétrica.

**NOTA.-**

Si reemplazamos  $i_3=2$ , en la segunda ecuaciones podemos reducir el orden del sistema:

$$\begin{bmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Aplicando factorización de Crout:

$$A = LU \Rightarrow \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ -7 & 25/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L z = b \Rightarrow z = \begin{bmatrix} 5/7 \\ -2/5 \end{bmatrix}$$

$$U x = z \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 18/35 \\ -2/5 \end{bmatrix}$$

Dado que A es simétrica y definida positiva se aplicar Cholesky:

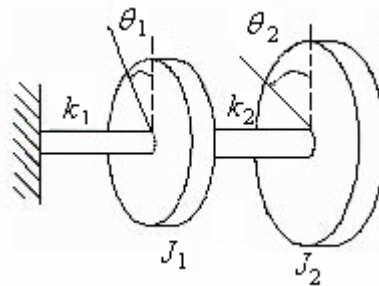
$$A = LL^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{14} & 0 \\ -7/\sqrt{14} & 5/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{14} & -7/\sqrt{14} \\ 0 & 5/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$Lz = b \Rightarrow z = \begin{bmatrix} 10/\sqrt{14} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$L^T x = z \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 18/35 \\ -2/5 \end{bmatrix}$$

### Pregunta 3

Se pretende hacer un estudio de las frecuencias naturales y las formas de los modos (vectores modales o propios) del siguiente sistema:



$$k_2 = 2k_1 \quad J_2 = 2J_1$$

Ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + (k_1 + k_2)\theta_1 - k_2\theta_2 &= 0 \\ J_2 \ddot{\theta}_2 - k_2\theta_1 + k_2\theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

La forma matricial de la ec. (1) es:  $\mathbf{J} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$  (2)

La solución de (2) es:  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{x}e^{j\omega t}$ , donde  $\mathbf{x}$  es el vector propio y  $\omega$  es la frecuencia.

Reemplazando en la ec. (2) queda:  $(-\omega^2 \mathbf{J} + \mathbf{K})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , donde  $\lambda = \omega^2$ .

Se pide:

- Encuentre las frecuencias del sistema y los modos del sistema en forma analítica.
- Utilice el método de la potencia y encuentre una aproximación del modo correspondiente a la menor frecuencia del sistema, inicie con un vector inicial  $\mathbf{x}^{(0)} = [1 \quad 1]^T$ , con una tolerancia de  $0.5 \cdot 10^{-3}$ .

### Solución

$$\mathbf{J}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{x} = \omega^2 \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

$$A = \frac{k_1}{J_1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= 0 & \lambda_1 &= k_1/J_1 * 3.732 & \lambda_2 &= k_1/J_1 * 0.268 \\ \omega_1 &= 1.932 \sqrt{k_1/J_1} & \omega_2 &= 0.5176 \sqrt{k_1/J_1} \end{aligned}$$

Modos

$$x1=0.732050807568877$$

$$x2= \begin{matrix} 1 \\ -0.366025403784439 \end{matrix}$$

$$b) \quad B = A^{-1} = \frac{J_1}{k_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Potencia inversa

x1	x2	1/u
1	1	
0.75	1	$0.25 k_1 / J_1$
0.7333333333333333	1	$0.26666 k_1 / J_1$
0.732142857142857	1	$0.267857 k_1 / J_1$
0.732057416267943	1	$0.267857 k_1 / J_1$

$$\omega = \sqrt{1/u} = \sqrt{1/0.267857} = 0.5176 \sqrt{k_1 / J_1}$$

#### Pregunta 4

El desplazamiento  $x$  (metros) de una masa que experimenta una oscilación amortiguada varia con el tiempo  $t$  (segundos) según el modelo:

$$x = -0.1 e^{\beta t} [\cos(\omega t) - (\beta / \omega) \text{sen}(\omega t)]$$

Donde  $\beta$  y  $\omega$  tienen unidades de  $\text{seg}^{-1}$ . Al realizar mediciones se obtiene un desplazamiento  $x$  de 0.0162 metros en un instante  $t$  de 0.41 segundos,  $\omega = 7.5 \text{ seg}^{-1}$ . Determine el parámetro  $\beta$ .

- Localice la raíz o raíces
- Realice 03 iteraciones del método de bisección y muestre el error.
- A partir de la aproximación obtenida en b) realice 03 iteraciones de Newton-Raphson y muestre el error.

#### Solución

a) Tabulando :

$$f(\beta) = 0.0162 + 0.1 e^{0.41\beta} \left( \cos(7.5 * 0.41) - \frac{\beta}{7.5} \text{sen}(7.5 * 0.41) \right)$$

$\beta$	$f(\beta)$
-8	0.0127
-7	0.0109
-6	0.0081
-5	0.0039
-4	-0.0025
-3	-0.0122
-2	-0.0270
-1	-0.0494
0	-0.0836

- 1 -0.1355
- 2 -0.2144
- 3 -0.3343
- 4 -0.5165
- 5 -0.7933

Se observa que la única raíz debe estar en [-5,-4].

b) Aplicando bisección:

a	x	b	err
-5	-4.5	-4	0.5
-4.5	-4.25	-4	0.25
-4.5	-4.375	-4.25	0.125

Raíz aproximada -4.375 y error es de 0.125

c) Aplicando Newton-Raphson:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{f(\beta_n)}{f'(\beta_n)}$$

$x_0 = -4.375000000000000$

$x_1 = -4.33776519902844$

$x_2 = -4.33805268463188$

$x_3 = -4.33805270194987$

$err_1 = 0.03723480097156$

$err_2 = 2.874856034402740e-004$

$err_3 = 1.731798970894261e-008$

**Los Profesores**