

**Solucionario del Examen Final de Cálculo Numérico (MB535)**

Sólo se permite el uso de una hoja de formulario

**Problema 1**

a) Encuentre un spline cuadrático para los siguiente puntos:

x	0	1	2
y	0	1	0

Se sabe que debe satisfacer:  $y'(0)=1$

**Solución**

Sea las funciones Spline:

$$S_0(x) = a_0t^2 + b_0t + c_0$$

$$S_1(x) = a_1(t-1)^2 + b_1(t-1) + c_1$$

Planteando las correspondiente condiciones de spline se tendrá:

$$S(t) = \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 & t \\ 1 \leq t \leq 2 & -2(t-1)^2 + (t-1) + 1 = -2t^2 + 5t - 2 \end{cases}$$

b) Se tiene el siguiente sistema:

$$\ddot{x} - \cos(x) \cdot t - \sin(x) = 0$$

$$x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad 0 \leq t \leq 15$$

$$h = 1e^{-3}$$

Complete las líneas, para resolver este sistema usando el método de Euler por Matlab:

```
function [x,y]=eulerp(df,xo,xf,yo,h)
close all
x=xo:h:xf;
x=x';
n=length(x);
y=yo;
for i=1:n-1
    yo=yo+_____ ;
    y=[y;yo];
end
plot(x,y)
```

y la función que representa la derivada será:

```
function dydx=df1(t,y)
dydx=[_____];
```

Desde la ventana de comando de matlab:

```
>> _____[enter]
```

## Solución

Sea:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x2 \\ x3 \\ \cos(x2)*t + \sin(x1) \end{bmatrix}$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
function [x,y]=eulerp(df,xo,xf,yo,h)
close all
x=xo:h:xf;
x=x';
n=length(x);
y=yo;
for i=1:n-1
    yo=yo+h*feval(df,x(i),yo);
    y=[y;yo];
end
plot(x,y)
```

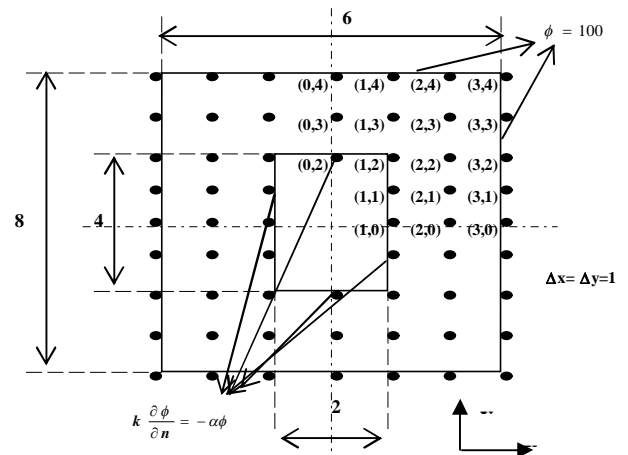
```
function dydx=df1(t,y)
dydx=[y(2) y(3) cos(y(2))*t+sin(y(1))];
```

```
>> eulerp('df1',0,15,[1 0 0],0.001)
```

- c) Considere la placa descrita en la figura. La temperatura externa de su superficie es mantenida en  $100\text{ }^\circ\text{C}$  en cuanto a las paredes internas está sujeta a convección representada por la condición de contorno  $k \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\alpha \phi$ , donde  $k=1$  y  $\alpha=1$ . Sabiendo que el proceso de conducción de calor en el interior es regido por la ecuación:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

y considerando a discretización mostrada en la figura, escriba a la forma discretizada de las ecuaciones en los nodos (0,2), (1,2), (1,1) y (2,0) indicados en la figura.



## Solución

$$T_{ext} = 100^\circ C \quad T_{int} : \frac{d\phi}{dn} = -\phi \quad \phi = u$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Punto (0,2)

De ecuación de Laplace:

$$u_{o3} + u_{12} + u_{o1} + u_{-12} - 4u_{o2} = 0$$

Por convección

$$\frac{d\phi}{dy} = \frac{u_{o,1} - u_{o,3}}{2h} = -u_{o,2} \quad h = \Delta y = 1 \rightarrow u_{o1} - u_{o3} = -2u_{o,2} \rightarrow u_{o1} = u_{o3} - 2u_{o,2}$$

Por simetría

$$u_{12} = u_{-12}$$

Aplicando lo anterior en ec. de Laplace quedaría:

$$2u_{o3} + 2u_{12} - 6u_{o2} = 0$$

Punto (1,2)

De ecuación de Laplace:

$$u_{13} + u_{22} + u_{11} + u_{o2} - 4u_{12} = 0$$

Punto (1,1)

De ecuación de Laplace:

$$u_{12} + u_{21} + u_{o1} + u_{10} - 4u_{11} = 0$$

Por convección

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{u_{21} - u_{o1}}{2h} = -u_{11} \quad h = \Delta x = 1 \rightarrow u_{o1} - u_{21} = 2u_{11} \rightarrow u_{o1} = u_{21} + 2u_{11}$$

Aplicando lo anterior en ec. de Laplace quedaría:

$$2u_{21} + u_{12} + u_{10} - 2u_{11} = 0$$

Punto (2,0)

De ecuación de Laplace:

$$2u_{21} + 100 + u_{10} - 4u_{20} = 0$$

## Problema 2

Sea la siguiente función :  $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ , la cual se ha tabulado :

X	0.25	0.50	0.75	1
F(x)	0.2449	0.4613	0.6302	0.7468

- Aproxime  $f(0.60)$  haciendo uso de todos los puntos de la tabla anterior mediante un polinomio interpolante de Newton basado en diferencias finitas.
- Aproxime  $f(0.60)$  evaluando la integral usando la cuadratura de Gauss-Legendre con  $n=2$ .
- Si el valor exacto de  $f(0.60)$  es 0.5352, evalúe los errores obtenido en a) y b) e indique cual de las aproximaciones es mejor y porque razón.

## Solución

a) Polinomio interpolante:

x	f(x)	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0.25	0.2449			
		0.2164		
0.50	0.4613		-0.0475	
		0.1689		-0.0048
0.75	0.6302		-0.0523	
		0.1166		
1.00	0.7468			

$$P(s) = 0.2449 + 0.2164s - 0.0475 \frac{s(s-1)}{2} - 0.0048 \frac{s(s-1)(s-2)}{6}$$

$$s = \frac{x - 0.25}{0.25}$$

$$s = \frac{0.60 - 0.25}{0.25} = 1.4$$

$$P(s = 1.4) = 0.5348$$

Tambien :

$$P(x) = -0.0512 x^3 - 0.3032 x^2 + 1.1154 x - 0.0142$$

$$P(0.60) = 0.5348$$

b)

$$\text{Haciendo el cambio de variable: } t = \frac{3}{10}(x+1)$$

$$I = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$I = f(-0.5774) + f(0.5774)$$

$$I = 0.5350$$

c)

Errores :

$$\text{Newton} = 0.0004$$

$$\text{Gauss} = 0.0002$$

Las dos aproximaciones se puede considerar buenas, aunque la cuadratura de Gauss da resultados ligeramente mejores.

### Problema 3

Considere un sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente al movimiento de una nave viajando entre la luna y la tierra:

$$(E_1) \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 = 2\dot{x}_1 + x_1 - \eta \frac{x_1 + \mu}{d_1^3} - \mu \frac{x_1 - \eta}{d_2^3} \\ \ddot{x}_2 = -2\dot{x}_2 + x_2 - \eta \frac{x_2}{d_1^3} - \mu \frac{x_2}{d_2^3} \end{cases}$$

siendo  $d_1 = \|(x_1 + \mu, x_2)\|$  y  $d_2 = \|(x_1 - \eta, x_2)\|$  las distancias a la tierra y la luna.

La posición es  $(x_1, x_2)$  en un sistema de coordenadas que se mueve con el sistema tierra-luna (El primer eje atraviesa la tierra y la luna y el segundo eje es perpendicular en el plano de movimiento del satélite). La tierra está en  $(-\mu, 0)$  y la luna en  $(\eta, 0)$  siendo  $\mu = 82.45^{-1}$  la proporción de masas luna/tierra y  $\eta = 1 - \mu$ .

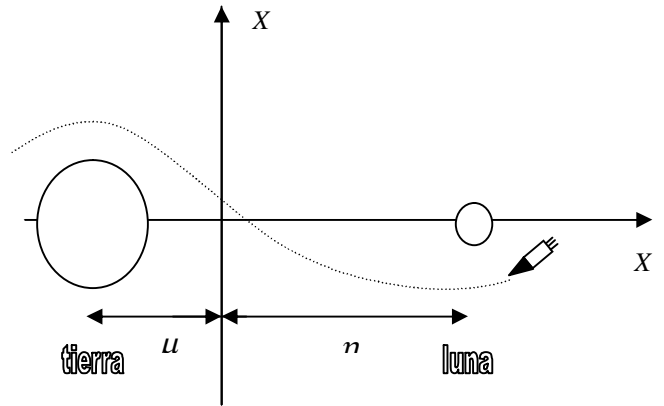
En el instante inicial  $t = t_0$  están dadas la posición  $(x_1, x_2)$  y la velocidad  $(v_1, v_2)$ .

a) Escriba el sistema  $(E_1)$  en la forma

$$(E_2) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

siendo  $y = (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$ .

b) Obtener  $y(0.2)$  aplicando el método de Euler con  $h=0.1$ . Use el vector de condiciones iniciales  $y_0$  correspondiente a salir de la posición  $(x_1, x_2) = (1.2, 0)$  con velocidad  $(v_1, v_2) = (0, -0.8)$



### Solución:

(a)

Sea

$$w_1(t) = x_1(t)$$

$$w_2(t) = \dot{x}_1(t)$$

$$w_3(t) = x_2(t)$$

$$w_4(t) = \dot{x}_2(t)$$

Luego

$$w_1'(t) = w_2(t)$$

$$w_2'(t) = 2w_4(t) + w_1(t) - \eta \frac{w_1(t) + \mu}{\|(w_1(t) + \mu, w_3(t))\|^3} - \mu \frac{w_1(t) - \eta}{\|(w_1(t) - \eta, w_3(t))\|^3}$$

$$w_3'(t) = w_4(t)$$

$$w_4'(t) = -2w_2(t) + w_3(t) - \eta \frac{w_3(t)}{\|(w_1(t) + \mu, w_3(t))\|^3} - \mu \frac{w_3(t)}{\|(w_1(t) - \eta, w_3(t))\|^3}$$

Condiciones Iniciales

$$w_1(t_0) = x_1$$

$$w_2(t_0) = v_1$$

$$w_3(t_0) = x_2$$

$$w_4(t_0) = v_2$$

(b)

**Método de Euler**

<b>0</b>	<b>1.2000</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-0.8000</b>
<b>0.1000</b>	<b>1.2000</b>	<b>-0.1342</b>	<b>-0.0800</b>	<b>-0.8000</b>
<b>0.2000</b>	<b>1.1866</b>	<b>-0.2631</b>	<b>-0.1600</b>	<b>-0.7684</b>

**Problema 4**

Suponga que  $a, b, f$  son funciones suficientemente suaves, y que  $a$  y  $b$  son funciones positivas. Considere el problema:

$$-\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + b(x)u(x) = f(x) \quad , \quad x \in [0,1] \quad \begin{array}{l} a(x) = 1 + x^2 \\ b(x) = 4 \\ f(x) = -2 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 3 \end{array}$$

$$u(0) = 0$$

$$u'(1) + \alpha u(1) = \beta$$

$h=0.25$

Encuentre:

- a) Las ecuaciones de las diferencias finitas
- b) La solución aproximada
- c) Si la solución exacta es  $u(x) = x^2$ , encuentre el error porcentual cometido. Comente su respuesta.

**Solución**

$$-\frac{da(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} - a(x) \frac{d^2u(x)}{dx^2} + b(x)u(x) = f(x)$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{1}{a(x)} \frac{da(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} + \frac{b(x)}{a(x)} u(x) - \frac{1}{a(x)} f(x)$$

$$a(x) = 1 + x^2$$

$$\frac{da(x)}{dx} = 2x$$

$$b(x) = 4$$

$$f(x) = -2$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{2x}{1+x^2} \frac{du(x)}{dx} + \frac{4}{1+x^2} u(x) + \frac{2}{1+x^2} f(x)$$

$$p(x) = -\frac{2x}{1+x^2}; \quad q(x) = \frac{4}{1+x^2} \quad r(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

$$A_i = 1 + h/2 p(x_i) \quad i=1,2,3,4$$

$$B_i = -(2 + h^2 q(x_i)) \quad i=1,2,3,4$$

$$C_i = 1 - h/2p(x_i) \quad i=1,2,3,4$$

$$D_i = h^2 r(x_i) \quad i=1,2,3,4$$

Para  $i=1,2,3$ :

$$A_i u_{i-1} + B_i u_i + C_i u_{i+1} = D_i$$

Para  $i=4$

$$A_4 u_3 + B_4 u_4 + C_4 u_5 = D_4$$

Y

$$u'(1) + u(1) = 3$$

$$\frac{u_5 - u_3}{2(1/4)} + u_4 = 3$$

$$2u_5 - 2u_3 + u_4 = 3$$

$$u_5 = u_3 - \frac{1}{2}u_4 + \frac{3}{2}$$

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 \\ 0 & 0 & (A_4 + C_4) & (B_4 - C_4/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 - \frac{3}{2}C_4 \end{bmatrix}$$

**Reemplazando valores**

<b>AA=</b>	<b>-2.23529</b>	<b>1.0588</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>BB=</b>	<b>0.117647</b>
	<b>0.9</b>	<b>-2.2</b>	<b>1.1</b>	<b>0</b>		<b>0.1</b>
	<b>0</b>	<b>0.88</b>	<b>-2.16</b>	<b>1.12</b>		<b>0.08</b>
	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>-2.6875</b>		<b>-1.625</b>
	<b>u<sub>i</sub></b>		<b>u(x)</b>		<b>Error (%)</b>	
	<b>0</b>		<b>0</b>		<b>0</b>	
	<b>0.105208451182261</b>		<b>0.0625</b>		<b>0.68</b>	
	<b>0.333217841384772</b>		<b>0.25</b>		<b>0.33</b>	
	<b>0.67126513180224</b>		<b>0.5625</b>		<b>0.19</b>	
	<b>1.10419730738771</b>		<b>1</b>		<b>0.1</b>	

**Los Profesores**