

**SOLUCIONARIO DE LA TERCERA PRÁCTICA CALIFICADA
 CALCULO NUMERICO (PARTE A) (30 minutos)**

APELLIDOS Y NOMBRE	SECCION	NOTA

Marque la alternativa que considere correcta:

1. Dada la siguiente tabla

x	8.1	8.3	8.6	8.7
x*ln(x)	16.94410	17.56492	18.50515	18.82091

¿Cual es el valor del error limitante al usar el polinomio de grado 1 para aproximar $f(x)=x*\ln(x)$, en $x=8.4$?

- a) 0.00118 b) 0.0013 c) 0.0005 **d) 0.00120** e) N.A

2. Sean los datos:

x	0	1	2
y	a	b	c

Al usar el polinomio de Lagrange, ¿cuál será el polinomio $L_1(x)$ en comandos de Matlab.

- a) $L=\text{poly}([2\ 0])/\text{polyval}(\text{poly}([0\ 2],1))$
 b) $L=\text{poly}([2\ 0])/\text{poly}([0\ 2],1)$
 c) $L=\text{polyval}([0\ 2],1)/\text{poly}([0\ 1\ 2],1)$
d) $L=\text{poly}([0\ 2])/\text{polyval}(\text{poly}([0\ 2],1))$
 e) N.A.

3. Sean los siguientes puntos: (0,-1); (1,1); (2,9) y (3,29); por el cual se puede construir un polinomio interpolante de la forma:

$$p(x) = a + b(x-1) + c(x-1)(x-3) + d(x-1)(x-3)(x-2),$$

entonces $a+b+c+d$ será:

- a) 7 b) 5 **c) 22** d) 18 e) N.A.

4. Con los datos de la pregunta anterior, estime $y'(x=1.5)$, para ello utilice un polinomio que interpole a los 4 puntos:

- a) 5.75 b) 6.75 **c) 7.75** d) 8.75 e) N.A.

5. Sea $g(x) = c_0 + c_1 \ln(x)$.

Se desea encontrar los coeficientes c_0 y c_1 de la regresión, se sabe que $f(x)$ pasa por los puntos (1,1),(2,2),(3,3). Use las instrucciones de Matlab para hallar los coeficientes c.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{1:3}; \mathbf{Y} = \mathbf{1:3}; \\ \mathbf{M} &= [\mathbf{X}' \cdot \mathbf{1} \ \mathbf{log}(\mathbf{X}')] \\ \mathbf{C} &= (\mathbf{M}' * \mathbf{M}) \setminus (\mathbf{M}' * \mathbf{Y}') \end{aligned}$$

6. Sea la siguiente tabla:

X	Y
0	0.5000
0.5000	-0.7500
1.0000	-1.5000
1.5000	-1.7500
2.0000	-1.5000
2.5000	-0.7500
3.0000	0.5000
3.5000	2.2500
4.0000	4.5000

Realice un ajuste cuadrático por mínimos cuadrados:

$$Y = \frac{1}{\dots} X^2 + \frac{-3}{\dots} X + \frac{0.5}{\dots}$$

$$R^2 = \frac{1.00}{\dots}$$

7. Por comodidad una función Spline se escribe de la siguiente manera:

$$S(x) = a(x - x_0)^3 + b(x - x_0)^2 + c(x - x_0) + d$$

Elabore una función para escribir $S(x)$ en la forma estándar como serie de potencias

$$p(x) = p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4, \text{ donde los coeficientes serán guardados en un vector } p:$$

function p=convierte(a, b, c, d, x0)

$$p = a * \text{poly}([x0 \ x0 \ x0]) + [0 \ b * \text{poly}([x0 \ x0]) + c * [0 \ 0 \ 1 \ -x0] + [0 \ 0 \ 0 \ d];$$

8. Determinar si la siguiente función es un Spline cúbico en el intervalo [0,2]

$$S(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & x \in [0,1] \\ 2(x-1)^3 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Justificar correctamente.

.....
Si es un spline cúbico, porque cumple con todas las condiciones de suavidad: continuidad, diferenciabilidad y doble diferenciabilidad en el nodo comun x=1.

9. Implementar una función en MatLab que dado (x_0, x_1, \dots, x_k) y $(f[x_0], f[x_1], \dots, f[x_k])$ devuelva $(f[x_0, x_1, x_2], f[x_1, x_2, x_3], \dots, f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k])$ que tenga la siguiente cabecera:

function [delta2]=difdiv2(x,y)

Solución:

```
function [delta2]=difdiv2(x,y)
k=length(x);
delta1=[];
for i=1:k-1
    delta1=[delta1, (y(i+1)-y(i))/(x(i+1)-x(i))]
end
```

```

delta2=[];
for i=1:length(delta1)-1
    delta2=[delta2,(delta1(i+1)-delta1(i))/(x(i+2)-x(i))]
end

```

10. Probar que $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \Delta^3 f(x_0) / (3! h^3)$

$$\begin{aligned}
 f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \\
 &= \frac{\frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} - \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}}{3h} \\
 &= \frac{\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{2h} - \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{2h} \\
 &= \frac{\frac{\Delta f_2}{h} - \frac{\Delta f_1}{h}}{2h} - \frac{\frac{\Delta f_1}{h} - \frac{\Delta f_0}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0}{6h^3} = \frac{\Delta^3 f_0}{3! h^3}
 \end{aligned}$$

Los Profesores

TERCERA PRÁCTICA CALIFICADA
CALCULO NUMERICO (PARTE B)
(80 minutos)

Problema 1

Dada la función $f(x) = \ln(x)$

- a) Hallar el polinomio interpolante $P(x)$ que pase por los puntos

$$x_0 = 1, x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = 2$$

e interpolar en $x = 1.5$

- b) Calcule una cota superior del error de interpolación $|f(x) - P(x)|$
c) ¿Cuál es la relación que existe entre el polinomio interpolante formado por los 3 primeros puntos y el polinomio obtenido en a) ?

Solución

a) Usaremos la expresión de Newton:

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)$$

$$f[x_0, x_1] = f[1, 4/3] = 0.8630$$

$$f[x_1, x_2] = f[4/3, 5/3] = 0.6694$$

$$f[x_2, x_3] = f[5/3, 2] = 0.5470$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[1, 4/3, 5/3] = -0.2904$$

$$f[4/3, 5/3, 2] = -0.1836$$

$$f[1, 4/3, 5/3, 2] = 0.1068$$

Con lo que obtenemos:

$$P(x) = 0.8630(x-1) - 0.2904(x-1)(x-4/3) + 0.1068(x-1)(x-4/3)(x-5/3)$$

$$P(1.5) = 0.4058$$

b) .

$$E = |\ln(3/2) - P(3/2)| = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \prod_{j=0}^3 (3/2 - x_j) \quad \xi \in \langle 1, 2 \rangle$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4}$$

$$E = (3/2 - 1)(3/2 - 4/3)(3/2 - 5/3)(3/2 - 2) \times \frac{-6}{\xi^4 \times 24}$$

$$|E| = \frac{0.0017361}{\xi^4} \quad \xi \in \langle 1, 2 \rangle$$

$$\Rightarrow |E| < 0.0017361$$

c)

$$p(x) = p_2(x) + [x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)$$

$$= p_2(x) + f[1, 4/3, 5/3, 2](x - 1)(x - 4/3)(x - 5/3)$$

Problema 2

Obtener una interpolación por Spline Natural para el polinomio $p(x) = x^4$, para $x=0, 1, 2$ y 3 .

- a) Muestre las funciones Spline $S(x)$ para cada intervalo.
- b) Dime el máximo error cometido, para ello tabule $|p(x) - S(x)|$ con $\Delta x = 1/4$.
- c) Comente sus resultados.

Solución

a)

i	hi	x	F(x)	f[,]
0	1	0	0	1
1	1	1	1	15
2	1	2	16	65
		3	81	

En este caso:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2] \end{bmatrix}$$

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 15 - 1 \\ 65 - 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = 2.4 \quad M_2 = 74.4 \quad M_0 = M_3 = 0$$

$$S(x) = \begin{cases} x \in [0, 1] & 0.4(x - 0)^3 + 0(x - 0)^2 + 0.6(x - 0) + 0 \\ x \in [1, 2] & 12(x - 1)^3 + 1.2(x - 1)^2 + 1.8(x - 1) + 1 \\ x \in [2, 3] & 12.4(x - 2)^3 + 37.2(x - 2)^2 + 40.2(x - 2) + 16 \end{cases}$$

b) Tabulando:

x	P(x)	S(x)	Error=P(x)-S(x)
0	0	0	0
0.25	0.0039	0.1562	0.1523
0.5	0.0625	0.35	0.2875
0.75	0.3164	0.6187	0.3023
1	1	1	0
1.25	2.4414	1.7125	0.7289
1.50	5.0625	3.7	1.3625
1.75	9.3789	8.0875	1.2914
2	16	16	0
2.25	25.6289	28.1812	2.5523
2.5	39.0625	43.85	4.7875
2.75	57.1914	61.8438	4.6523
3	81	81	0

Se observa que el maximo error es 4.7875.

c) El mayor error se registra en el tercer intervalo.

Problema 3

Dados los siguientes datos:

X	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Y	2.0	2.04	2.25	2.33	2.56	2.83

Se sabe que $g(x) \approx a\sqrt{1+bx^2}$

Se pide:

- a) Encuentre la función regresora $g(x)$, para aplicar el problema de mínimos cuadrados.
- b) Encuentre la ecuación normal $A^tAc=A^tY$ y donde c son los coeficientes de $g(x)$.
- c) ¿Calcule los coeficientes a y b ?
- d) ¿Calcule el factor de regresión?. ¿Que tan bueno es el ajuste?

Solución

a) $y = a\sqrt{1+bx^2}$
 $y^2 = a^2 + a^2bx^2$

Cambio de variable: $Y = y^2 \quad X = x^2 \quad A = a^2 \quad B = a^2b$

$Y = A + BX$

b) Ecuacion Normal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0^2 \\ 1 & 0.2^2 \\ 1 & 0.4^2 \\ 1 & 0.6^2 \\ 1 & 0.8^2 \\ 1 & 1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 \\ 2.04^2 \\ 2.25^2 \\ 2.33^2 \\ 2.56^2 \\ 2.83^2 \end{bmatrix}$$

$M \cdot p = Y$

$M^T \cdot M \cdot p = M^T \cdot Y$

$$\begin{bmatrix} 1.5664 & 2.2 \\ 2.2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.1341 \\ 33.2155 \end{bmatrix}$$

$A = 3.8896$

$B = 4.1097$

c)

$a = \sqrt{A} = 2.0272$

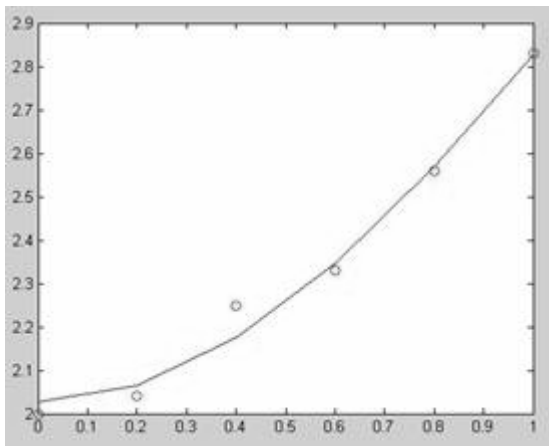
$b = \frac{B}{a^2} = 0.9464$

$g(x) = 2.0272\sqrt{1+0.9464x^2}$

d)

$$R^2 = 0.9781$$

Es un buen ajuste.



Los Profesores