Universidad Nacional de Ingeniería **20-05-06**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2006-1**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

SEGUNDA PRÁCTICA DE CALCULO NUMERICO
PARTE B (Solucionario)

Apellidos y Nombres	Código	Sección	Nota

SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO.

Marque la alternativa que considere correcta o complete según el caso:

Problema 1

a) Para que valores de a, el siguiente sistema converge, al usar el método de Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución

$$Tg = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\det(Tg - \lambda I) = -\lambda\,(a-1-\lambda\,) \Rightarrow \varepsilon(A) = \{0, a-1\}$$

$$\rho(Tg) = |a-1| < 1 \therefore \mathit{converge\ si\ y\ solo\ si} \quad 0 < a < 2$$

b) Si $a = 0$ y $w = 0.8$ (subrelajación) realice 03 iteraciones. ¿Converge el método? Justifique.
Algoritmo:

Solución

$$\hat{x}_1^{(n+1)} = 3 - x_2^{(n)}$$
$$x_1^{(n+1)} = w\hat{x}_1^{(n+1)} + (1-w)x_1^{(n)}$$
$$\hat{x}_2^{(n+1)} = 1 + x_1^{(n+1)}$$
$$x_2^{(n+1)} = w\hat{x}_2^{(n+1)} + (1-w)x_2^{(n)}$$

Iteraciones	x1	x2
0	0	0
1	2.4	2.72
2	0.7040	1.9072
3	1.0150	1.9935

Converge!!

Problema 2

Si A= $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) El método de la potencia converge al dominante para cualquier vector inicial arbitrario.
b) La multiplicidad geométrica es igual a la multiplicidad aritmética
c) Si aplicamos el método de la potencia inversa iterada con q=0 tenderá al valor propio máximo del sistema.
d) Tiene un valor propio dominante
e) N.A.

Problema 3

Sea la matriz A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$.¿ Encuentre el espectro de A y la Matriz de Vectores propios Q y analice si es posible ponerlo a su forma diagonal en bloques?. Realice $Q^{-1}AQ$.

Solución

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda + 2)^2 \qquad \varepsilon(A) = \{-2\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2a = -b$$

$$a = -\frac{b}{2} = -\frac{t}{2}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Valores\ \mathrm{Pr}\,opios\ Generalizados : (A - 2I)x_2 = x_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2c + d = -1/2$$

$$d = 0$$

$$c = -1/4$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = Q^{-1}AQ$$

Problema 4

En la ecuación $x^2 - 4\,sen(x) = 0$, se ha establecido que existe una raíz en [1, 2], Cuantas iteraciones usando el método del punto fijo ($x = g(x)$) serán necesarias, para que la raíz tenga una aproximación en 5 cifras decimales exactas? Sug. Tome xo= 1.5, L = $\left| g'(\xi) \right|_{\xi=2}$

a) 5 b) 24 $\boxed{\text{c) 15}}$ d) 38 e) N.A.

Problema 5

Teniendo en cuenta que el método de Gauss – Seidel es convergente cuando la matriz A es simétrica y definida positiva encuentre para que valores de *a* es convergente la siguiente matriz:

$$A = \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & a & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & a-\mathbf{1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdots & a-\mathbf{8} \end{pmatrix}}^{\mathbf{10\ veces}}$$

$\boxed{\text{a) } a > \mathbf{9}}$ b) $-\mathbf{1} < a < \mathbf{1}$ c) $a > \mathbf{8}$ d) $-\mathbf{2} \le a \le \mathbf{2}$ e) $a > \mathbf{2}$

Problema 6

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}$$

Escriba un programa en MATLAB para hallar la multiplicidad geométrica asociada al valor propio dominante.

Solución

```
A=[12 –4; -8 8]
Espectro=eig(A)
[m,p]=max(abs(Espectro))
vpd=Espectro(p)
ma=2-rank(A-vpd*eye(2))
```

Problema 7

¿Cuántas iteraciones del método de bisección se necesitan para aproximar la menor raíz positiva de la ecuación $\mathbf{x} - \mathbf{tanx} = \mathbf{0}$, con una precisión de 3 cifras decimales exactas, empezando con un intervalo [a,b] que contenga a dicha raíz y b-a=0.1?

Solución

$$\frac{b-a}{2^n} < TOL \Rightarrow b - a = 0.1 \quad TOL = 0.5x10^{-3} \Rightarrow n = 8 \; iteraciones.$$

Problema 8

Sea la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$, la cual tiene una raíz cercana a 1.5, seleccione cual o cuales de las siguientes formas de iteración de punto fijo son divergentes:

$\boxed{\text{a) } g(x) = x^2 - 2}$ b) $g(x) = \sqrt{x+2}$ c) $g(x) = 1 + 2/x$ d) $g(x) = \dfrac{x^2+2}{2x-1}$ e) N.A.

Problema 9

Sea: $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, ¿cuál de los siguientes es un vector propio de A?

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{c)}}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e) N.A.

Problema 10

Sea el sistema: $\begin{bmatrix} 10 & \dfrac{\alpha+5}{2} \\ \dfrac{\alpha+4}{2} & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, si α es el último digito de su código entonces el

radio espectral de Jacobí será: ....

Las instrucciones en MATLAB serán:

Solución

```
Acu=[];
for a=0:9
   A=[10 (a+5)/2; (a+4)/2  20];
   D=diag(diag(A));
   L=D-tril(A);
   U=D-triu(A);
   Tj=inv(D)*(L+U);
    Rho=max(abs(eig(Tj)));
    Acu=[Acu;a Rho];
end
disp(Acu)
```

a	Radio Espectral de Jacobi
0	0.1581
1	0.1936
2	0.2291
3	0.2646
4	0.3000
5	0.3354
6	0.3708
7	0.4062
8	0.4416
9	0.4770

Los Profesores