

**EXAMEN SUSTITUTORIO DE CALCULO NUMERICO (MB535)
S O L U C I O N A R I O**

- **SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **FUNDAMENTE CLARAMENTES SUS RESPUESTAS**

Problema 1

a Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Determine los valores del parámetro α para los cuales la matriz A admite factorización de Cholesky.

Solución

Para que admita factorización de Cholesky la matriz A debe cumplir:

1. Sea Simétrica
2. Definida Positiva.

De la condición 2:

$$1 > 0$$

$$(1 - \alpha^2) > 0 \implies -1 < \alpha < 1 \dots\dots\dots(1)$$

$$(2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1) > 0 \implies \alpha > -1/2 \dots\dots(2)$$

de (1) y (2)

$$\boxed{-1/2 < \alpha < 1}$$

b. Los polinomios de Legendre se pueden obtener aplicando la siguiente formula recursiva:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \quad n \geq 2$$

Escriba **una** función que genere el polinomio de Legendre para un grado n cualquiera usando la siguiente cabecera: **function p=legendre(n)**

Solución

```
% legendre.m
function p=legendre(n)
if n==0
    p=1;
elseif n==1
    p=[1 0];
else
    p=((2*n-1)*[legendre(n-1) 0]-(n-1)*[0 0 legendre(n-2)])/n;
end
```


Un préstamo de \$10000 se devolvió en 60 pagos mensuales de \$250, determine la tasa de interés mensual r , use $r_0 = 0.015$.

- Encuentre el algoritmo del punto fijo y demuestre que el punto fijo es único.
- Realizar 03 iteraciones usando el algoritmo encontrado en a).
- Utilice el Método del Newton para aproximar el interés mensual r con cuatro cifras significativas.

Solución

a)

$$10000r = 250 \left(1 - \frac{1}{(1+r)^{60}} \right) \Rightarrow f(r) = 40r + \frac{1}{(1+r)^{60}} - 1 = 0$$

$$r = g(r) = \frac{1}{40} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^{60}} \right) \Rightarrow g'(r) = \frac{3}{2} (1+r)^{-61} \Rightarrow |g'(0.015)| = 0.6049 < 1$$

Unicidad del punto fijo

$$a=0, b=0.015$$

$$g(a) \in [a \ b] \quad g(a) = 0$$

$$g(b) \in [a \ b] \quad g(b) = 0.0148$$

$$\{x^k\} \in [a \ b]$$

\therefore el punto fijo es único

b)

A partir del punto inicial $x_0 = 0.015$

$$r_k = \frac{1}{40} \left(1 - \frac{1}{(1+r_{k-1})^{60}} \right)$$

I	xi	g(xi)
1	0.015	0.0148
2	0.0148	0.0146
3	0.0146	0.0145

c)

$$f(r) = 40r + \frac{1}{(1+r)^{60}} - 1 \Rightarrow f'(r) = 40 - \frac{60}{(1+r)^{61}}$$

$$r_n = r_{n-1} - \frac{40r_{n-1} + \frac{1}{(1+r_{n-1})^{60}} - 1}{40 - \frac{60}{(1+r_{n-1})^{61}}}$$

$$r_1 = 0.014411839$$

$$r_2 = 0.014394797$$

$$r_3 = 0.01439477$$

Problema 3

Dada la siguiente integral con límites infinitos:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

- Resolver usando cuadratura Gaussiana ($n=4$), para ello debe realizar un primer cambio de variable para llevarlo a límites finitos. (sug. $x = 2/t$)
- Hallar el error de la aproximación obtenida en a) para ello debe hallar el valor exacto de la integral (sug. $u = \sqrt{x}$).
- Comente sus resultados

Solución

a) Haciendo $x = 2/t$:

$$I = \int_0^2 \frac{2e^{-\sqrt{2/t}}}{t^2 \sqrt{2/t}} dt$$

Para aplicar la cuadratura Gaussiana hacemos un segundo cambio de variable: $w = t - 1$:

$$I = \int_{-1}^1 G(w) dw = \int_{-1}^1 \frac{2e^{-\sqrt{2/(w+1)}}}{(w+1)^2 \sqrt{2/(w+1)}} dw$$

De la tabla de Gauss-Legendre:

$$\int_{-1}^1 G(w) dw \approx c_1 G(w_1) + c_2 G(w_2) + c_3 G(w_3) + c_4 G(w_4) = 0.7593$$

b) Haciendo: $u = \sqrt{x}$

$$x = u^2 \quad dx = 2u du$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} 2u du = -2e^{-u} \Big|_1^{\infty} = \frac{2}{e} = 0.7358$$

$$\text{error} = |0.7358 - 0.7593| = 0.0235$$

c) La precisión no tan es buena.

Problema 4

Sea la ecuación diferencial de tercer orden:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = f(t)$$

$$y''(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \quad y(0) = 2$$

t	0	0.05	0.1	0.15
$f(t)$	2.5	2.5025	2.51	2.5225

- Plantee el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Obtener $y(0.2)$ aplicando Runge Kutta de orden 2 con $h=0.1$.
- Determine el error si la solución analítica es:

$$y = \left(-\frac{19}{2}t + \frac{9}{4}t^2 + \frac{33}{2} \right) e^t - \frac{29}{2} - 6t - t^2$$

Solución

$$x_1 = y \quad x_2 = y' \quad x_3 = y''$$

$$a) \begin{cases} x_1' = x_2 & x_1(0) = 2 \\ x_2' = x_3 & x_2(0) = 1 \\ x_3' = 3x_3 - 3x_2 + x_1 + f(t) & x_3(0) = 0 \end{cases}$$

b) Algoritmo de Runge Kutta 2

$$f(t) = t^2 + 2.5$$

$$k_1 = h \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 3x_3 - 3x_2 + x_1 + t^2 + 2.5 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = h \begin{bmatrix} x_2 + k_1(2) \\ x_3 + k_1(3) \\ 3(x_3 + k_1(3)) - 3(x_2 + k_1(2)) + (x_1 + k_1(1)) + (t+h)^2 + 2.5 \end{bmatrix}$$

$$X = X + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad \text{con } X \in \mathbb{R}^3, \quad h=0.1$$

$$i=0 \quad t_0=0 \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(t) = t^2 + 2.5$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.15 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.015 \\ 0.206 \end{bmatrix}$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 1.0075 \\ 0.178 \end{bmatrix}$$

i=1 $t_1=0.1$ $X^{(1)}$

$$k_1 = \begin{bmatrix} 0.10075 \\ 0.0178 \\ 0.21215 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 0.10253 \\ 0.039015 \\ 0.28353 \end{bmatrix}$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \begin{bmatrix} 2.20164 \\ 1.0359075 \\ 0.42584 \end{bmatrix}$$

yexact = 2.000000000000000 2.10027412173302 2.20240651737290
 yaprox= 2.000000000000000 2.100000000000000 2.20164

c) Error = 0 0.2741x10⁻³ 0.7665x10⁻³

Los Profesores