

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE CALCULO NUMERICO (MB535)

SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO

Problema 1

a) Demuestre que toda matriz de la forma: $J_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, no es diagonalizable.

Solución

El polinomio característico será:

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \alpha - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \lambda \end{bmatrix} = (\alpha - \lambda)^4$$

Por lo tanto $\lambda = \alpha$ tiene multiplicidad algebraica 4.

$$\text{Además } A - \alpha I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Que ya esta en la forma escalonada reducida, vemos que la multiplicidad geométrica de $\lambda = \alpha$ es 1. Por lo tanto no hay una base de vectores propios (se requiere 4 L.I., pero hay solo 1) para J_α y entonces la matriz no es diagonalizable.

b) En un sistema de punto flotante binario de 8 dígitos de mantisa, de los números $x_1 = 0.10110011x2^2$ y $x_2 = 0.10110010x2^2$. ¿Cual de los dos representa mejor al número $(2.8)_{10}$

Solución

$$x_1 = (2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8})2^2 = 2.7969$$

$$x_2 = (2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-7})2^2 = 2.7813$$

El más cercano a 2.8 es x_1

c) Dada la sucesión de término general $u(n)=1+1/2^2+\dots+1/n^2$, escribir una función en Matlab que determine $R=u(n1)-u(n2)$, dados $n1$ y $n2$. El nombre de la función es *suc*.

Solución

```
function [R]=suc(n1,n2)
un1=1:n1;
un1=sum(1./un1.^2);
un2=1:n2;
un2=sum(1./un2.^2);
R=un1-un2;
```

d) Escriba un código en Matlab para graficar la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \\ 3/2 & 0 \leq x < 1 \\ 3-x & x \geq 1 \end{cases}$$

$$x \in [-1 \quad 2]$$

Solución

```
x=linspace(-1,2,30);
y=(x+2).*(x<0)+3/2.*((0<=x)&(x<1))+(3-x).*(1<=x);
plot(x,y)
```

e) La raíz de la ecuación $f(x) = 0$ es encontrada usando el método de Newton Raphson. El valor estimado inicial de la raíz es $x_0 = 3$, $f(3) = 5$. El ángulo de la tangente de la function $f(x)$ en $x = 3$ es 57° . el siguiente estimado más cercano a la raíz, x_1 , es:
 A) -3.2470 **B) -0.2470** C) 3.2470 D) 6.2470

Problema 2

Considere la matriz A definida según:

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}$$

Considerar el sistema $Ax = b$ donde:

$$b = \{11/6 \quad 13/12 \quad 47/60\}^T$$

- a. Resolver el sistema utilizando eliminación Gaussiana, operando con redondeo a 3 decimales.
- b. Analizar el condicionamiento de la matriz.
- c. Si \bar{x} es el vector solución aproximado obtenido en a), calcule el residual r ($r = b - A\bar{x}$). Comente sus resultados teniendo en cuenta que el exacto es $(1 \ 1 \ 1)^T$.
- d. ¿Es posible obtener la factorizacion de Cholesky?

Solución

a..

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.333 \\ 0.5 & 0.333 & 0.25 \\ 0.333 & 0.25 & 0.2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1.833 \\ 1.083 \\ 0.783 \end{pmatrix}$$

$$[A \quad b] \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.333 & 1.833 \\ 0 & 0.083 & 0.083 & 0.167 \\ 0 & 0 & 0.006 & 0.005 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.966 \\ 1.179 \\ 0.966 \end{pmatrix}$$

b. $k(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 1.833 \times 408 = 747.864$

$$c. r = \begin{pmatrix} 11/6 \\ 13/12 \\ 47/60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.333 \\ 0.5 & 0.333 & 0.25 \\ 0.333 & 0.25 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.966 \\ 1.179 \\ 0.966 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0442 \\ -0.0341 \\ -0.0266 \end{pmatrix}$$

d. Es simétrica y definida positiva por lo tanto se puede obtener la factorización de Cholesky.

Problema 3

$$\text{Sea: } A = \begin{bmatrix} -28 & 0 & 135 \\ 12 & 2 & -54 \\ -6 & 0 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.5 & 0 & 67.5 \\ 6 & 0.5 & -27 \\ -3 & 0 & 14 \end{bmatrix}^{-1}$$

- Determine los valores propios de A y sus multiplicidades algebraica y geométrica.
- ¿Es A diagonalizable? En caso afirmativo muestre la matriz de transformación P (o Q) y la matriz diagonal D.
- Realice 04 iteraciones del método de la potencia inversa a partir de $(1 \ 0 \ 0)^T$, para tener una aproximación del valor propio inferior y su vector propio correspondiente. Muestre el error del valor propio aproximado.

Solución

- Polinomio característico

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -28-\lambda & 0 & 135 \\ 12 & 2-\lambda & -54 \\ -6 & 0 & 29-\lambda \end{vmatrix} = -4 + 3\lambda^2 - \lambda^3 = -(\lambda+1)(-2+\lambda)^2$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad algebraica $ma_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con $ma_2 = 2$. La multiplicidad geométrica $mg_1 = n - \text{rango}(A + I) = 1$ y $mg_2 = n - \text{rango}(A - 2I) = 2$.

$$b) (A + I)X = 0 \quad \begin{bmatrix} -27 & 0 & 135 \\ 12 & 3 & -54 \\ -6 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X = t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)X = 0 \quad \begin{bmatrix} -30 & 0 & 135 \\ 12 & 0 & -54 \\ -6 & 0 & 27 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X = t \begin{pmatrix} 9/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 9/2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Método de la potencia inversa

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -14.5 & 0 & 67.5 \\ 6 & 0.5 & -27 \\ -3 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = Bx_0 = \begin{pmatrix} -14.5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \mu_1 = -14.5 \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4138 \\ 0.2069 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} = -0.0690$$

$$y_2 = Bx_1 = \begin{pmatrix} -0.5345 \\ 0.2060 \\ -0.1034 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = -0.5345 \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.3871 \\ 0.1935 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \frac{1}{\mu_2} = -1.8710$$

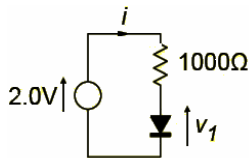
$$y_3 = Bx_2 = \begin{pmatrix} -1.4355 \\ 0.5800 \\ -0.2903 \end{pmatrix} \quad \mu_3 = -1.4355 \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4045 \\ 0.2022 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \frac{1}{\mu_3} = -0.6966$$

$$y_4 = Bx_3 = \begin{pmatrix} -0.8483 \\ 0.3371 \\ -0.1685 \end{pmatrix} \quad \mu_4 = -0.8483 \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.3974 \\ 0.1987 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \frac{1}{\mu_4} = -1.1788$$

$$error = |-1 - (-1.1788)| = 0.1788$$

Problema 4

Considere un circuito electrónico simple



$$\text{Por ley de Ohm: } i = \frac{2 - V_1}{1000}$$

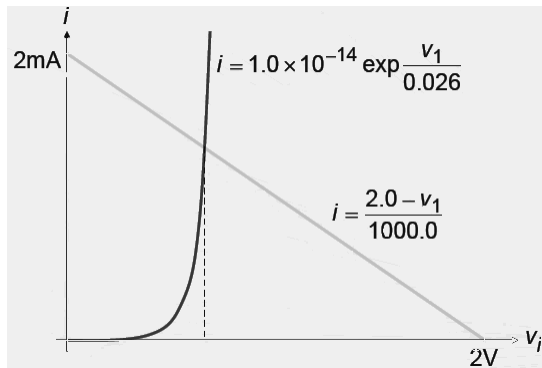
$$\text{Por la ecuación de Shockley para el diodo: } i = 1.0 \times 10^{-14} e^{\frac{V_1}{0.026}}$$

Se desea calcular el voltaje V_1 , para lo cual se pide:

- Localice un dominio para el valor de V_1
- Encuentre el algoritmo del punto fijo y demuestre que el punto fijo es único.
- Realice 03 iteraciones usando el algoritmo encontrado en b).
- Realice 02 iteraciones usando Newton Raphson, use como valor inicial la última aproximación encontrada en c).
- Comente acerca de la convergencia entre estos dos métodos.

Solución

- Localizar el dominio para el valor de V_1



b) Encuentre el algoritmo del punto fijo y demuestre que el punto fijo es único.

La ecuación puede ser transformada como:

$$\frac{2 - v_1}{1.0 \times 10^{-11}} = \exp\left(\frac{v_1}{0.026}\right) \quad \text{o} \quad \ln\left(\frac{2 - v_1}{1.0 \times 10^{-11}}\right) = \frac{v_1}{0.026}$$

Tal que:

$$v_1 = 0.026 \ln\left(\frac{2 - v_1}{1.0 \times 10^{-11}}\right)$$

en la forma deseada para el método del punto fijo

$$g(x) = 0.026 \ln\left(\frac{2 - x}{1.0 \times 10^{-11}}\right)$$

O bien

$$g(x) = 0.026 \ln(2 - x) - 0.026 \ln(1.0 \times 10^{-11})$$

Prueba de la convergencia

$$g'(x) = -\frac{0.026}{2 - x} \Big|_{x_0=1} = -0.026$$

$$k = |g'(1)| = 0.026 < 1$$

Unicidad del punto fijo

$$a=0, b=1.0$$

$$g(a) \in [a \ b] \quad g(a) = 0.6766$$

$$g(b) \in [a \ b] \quad g(b) = 0.6585$$

$$\{x^k\} \in [a \ b]$$

\therefore el punto fijo es único

c) Realizar 03 iteraciones usando el algoritmo encontrado en b).

A partir del punto inicial $x_0 = 1.0$

$$x_k = 0.026 \ln\left(\frac{2 - x_{k-1}}{1.0 \times 10^{-11}}\right)$$

I	xi	g(xi)
1	0.658539	0.666177
2	0.666177	0.666029

d) Hacer dos iteraciones usando Newton Raphson, use como valor inicial la última aproximación encontrada en c).

$$x_0 = 0.66617$$

$$f(x) = 1.0 \times 10^{-14} \exp(x/0.026) - (2-x)/1000$$

$$df(x) = 1.0e-14/0.026*\exp(x/0.026)+1/1000$$

i	x	f	df	-f/df
0	0.66617	7.26582e-6	0.05258	-1.38184e-4
1	0.6660318	1.890740e-8	0.05231	- 3.614684e-7
2	0.6660314	1.289166e-13	0.05231	-2.46464e-12

Los Profesores