UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **Ciclo: 2005-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
AREA ACADEMICA DE CIENCIAS BASICAS

CALCULO NUMERICO (MB535)
TERCERA PRÁCTICA CALIFICADA

INDICACIONES

1. Resolver las preguntas según la tabla siguiente:

SECC.	PROBLEMAS			
A	1	7	4	20
C	2	8	5	21
D	3	9	6	22
E	10	16	13	23
F	11	7	14	20
G	12	8	15	21
H	17	9	18	22
I	1	16	19	23

2. Se formaran grupos de uno o dos alumnos correspondientes a la misma sección.
3. Si se detecta dos trabajos idénticos tendrán calificativo CERO.
4. Presentar un informe adjuntando su diskette respectivo.
5. Contenido del informe:

- Análisis del problema
- Implementación de los algoritmos (listados de programas) y prueba
- Conclusiones y recomendaciones

FECHA DE ENTREGA:

Día : Jueves 18-08-2005

Hora : 14- 15 horas

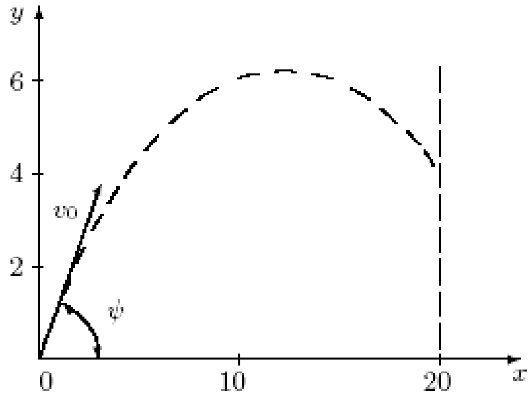
Lugar : - Centro de Cómputo.

HORARIO DE ASESORIA

	LUNES	MARTES	MIERCOLES	JUEVES	VIERNES
11:00-12:00		Rosa Garrido Of. A1-254			
12:00-14:00	Robert Castro C. de Cómputo				

Problema 1

Un proyectil fue lanzado de un punto tomando como origen haciendo las siguientes observaciones:



i) Se fotografió el proyectil a 10 metros del punto de lanzamiento y fue determinado su altitud en ese lugar: 6 metros.

ii) Una barrera a los 20 metros del punto el lanzamiento lo interceptó y allí fue determinada su altitud: 4 metros..

Con esos 3 puntos es posible interpolar la trayectoria del proyectil. Comparando la ecuación teórica con la obtenida por la interpolación es posible determinar los parámetros de lanzamiento: el ángulo ψ con la horizontal, y la velocidad inicial $\boldsymbol{v_0}$. Asimismo:

a) Determine el polinomio interpolador

b) Determine ψ y v_0 sabiendo que la ecuación de la trayectoria es dada por:

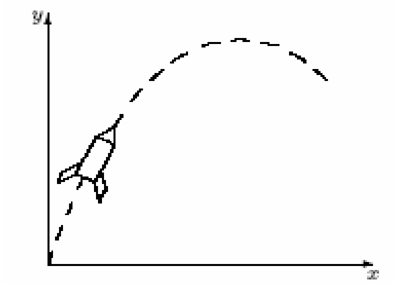
$$y \ = \ x \ tg \ \psi - \frac{1}{2} \ g \ \frac{x^2}{v_0^2 \ \cos^2 \psi},$$

Donde g =9.86 m/s^2.

c) Calcule la altitud del proyectil a 5 metros del punto de lanzamiento.

Problema 2

Un cohete es lanzado en la dirección mostrada en la figura:



y las coordenadas x e y en varios instantes de tiempo t después del lanzamiento, están dados en la tabla:

t (segundos)	x (mil pies)	y (mil pies)
0	0	0
100	80	300
200	200	700
300	380	1200
400	500	1000
500	550	600

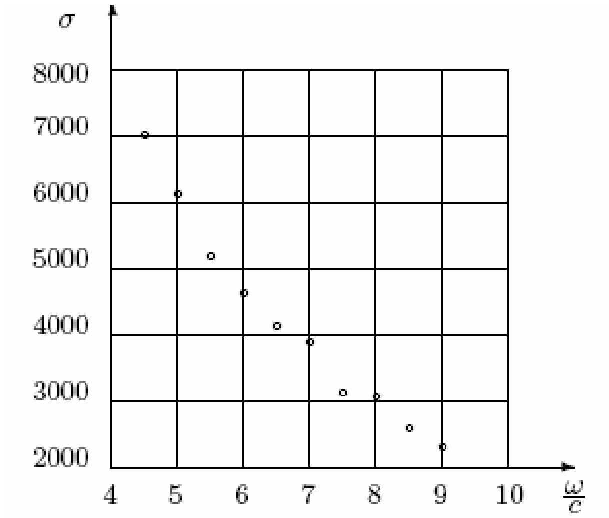
a) Calcule x(250), y(250) e y(x(250)), usando polinomio de interpolación sobre todos los puntos.
b) Compare los valores de y(250) e y(x(250)) . ¿Los resultados son los mismos?

Observe que si Ud. estuviera haciendo un programa para resolver este problema en el item a) para interpolar (t_i,x_i), (t_i,y_i) e (x_i,y_i), o sea existirá tres polinomios interpoladores y una subrutina.

Problema 3
Cuando se resuelve numéricamente la ecuación de estado de equilibrio de flujo de calor, las temperaturas *u(x,y)* se calculan en los nodos de una retícula construida en el dominio de interés. Cuando se resuelve cierto problema, se obtienen los valores dados en la siguiente tabla. Este procedimiento no proporciona las temperaturas en puntos distintos a los nodos de la retícula; si se requieren, puede interpolarse para encontrarlos. Use los datos para estimar los valores de la temperatura en los puntos (0.72,1.24), (1.66,2.43) y (0.63,0.87).

y / x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
0.0	0.0	5.00	10.00	15.00	20.00	25.00
0.5	5.00	7.51	10.05	12.70	15.67	20.00
1.0	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
1.5	15.00	12.51	9.95	7.32	4.33	0.0
2.0	20.00	15.00	10.00	5.00	0.00	-5.0

Problema 4
La resistencia a la compresión de concreto, sigma, disminuye con el aumento de razón de agua /cemento, $\frac{w}{c}$, (en galones de agua por saco de cemento). La resistencia a la compresión de tres muestras de cilindros para varias razones de $\frac{w}{c}$ se muestran en el siguiente gráfico:



Cuyos valores se dan en la tabla:

$\frac{\omega}{c}$	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0
σ	7000	6125	5237	4665	4123	3810	3107	3070	2580	2287

a) Usando el método de los mínimos cuadrados, ajuste σ, a los datos, utilizando una función del tipo $k_1 e^{-k_2 \frac{w}{c}}$.

b) Compare los valores de la curva obtenida en a) con el del gráfico, para verificar (por inspección) si la curva obtenida para σ es una buena aproximación.

c) Encuentre el factor de regresión. Comente sus resultados.

Problema 5

Después de ser efectuadas las mediciones en un generador de corriente continua, fueron obtenidos los siguientes valores indicados por un voltímetro y un amperímetro.

$I(carga(A))$	1.58	2.15	4.8	4.9	3.12	3.01
$V(v)$	210	180	150	120	60	30

Haga un gráfico de los datos.

a) Ajuste los datos por un polinomio de grado adecuado

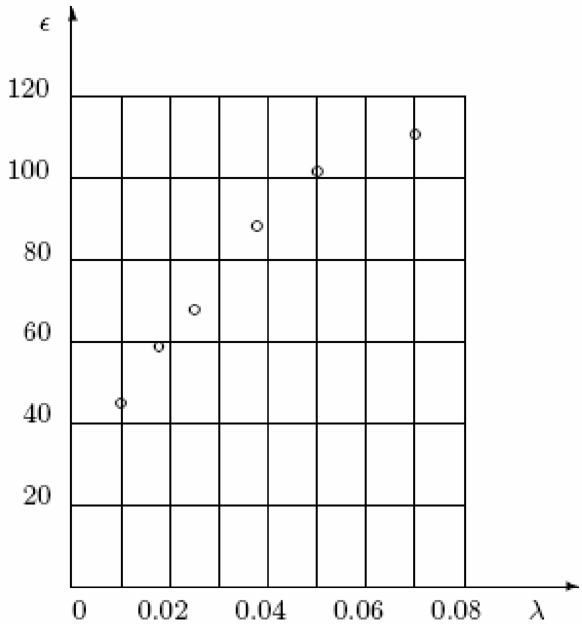
b) Estime el valor a ser obtenido en el voltímetro cuando el amperímetro está marcando 3.05A.

Problema 6

Un tubo fino es sumergido en agua. En la base del tubo hay un reactor eléctrico, que describe movimiento oscilatorio de arriba hacia abajo. En cualquier instante, la coordenada y la base del tubo es dada por la fórmula $y=\lambda\sin(\omega t)$, donde λ es la amplitud del movimiento y ω es la frecuencia de oscilación. Medidores de deformación colocados en la base del tubo miden la deformación del mismo, en función de la amplitud de la oscilación λ. Los valores de la deformación $\in$ medido en relación a la amplitud λ se encuentran en la tabla:

λ	0.010	0.020	0.0025	0.038	0.050	0.070
ϵ	45×10^{-6}	59×10^{-6}	69×10^{-6}	87×10^{-6}	101×10^{-6}	112×10^{-6}

Colocando los datos de la tabla, en un gráfico



Parece apropiado aproximar la función por una parábola. Asimismo, usando los métodos de los mínimos cuadrados:

a) Ajuste la función $\in$ por la función del tipo: $a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2$

b) Haga un gráfico de los valores de $\in(\lambda)$ vs λ, obtenidos a través de la parábola, y marque en el mismo gráfico los puntos de la tabla. ¿Es el polinomio una buena aproximación? Justifique.

Problema 7

Interpolar la función:

$$f(x) = e^x sin(x) - x - 1$$

en los puntos x_i= -1+(i-1)/2, con i=1,2,..5 usando la función ***spl*** en Natlab creada por el usuario que le permita seguir la función por polinomios segmentados de grado 3.

Compare con la rutina del Matlab.

Grafique el polinomio de interpolación y la función f en el intervalo [−2, 2].

Problema 8

Evalúe la función

$$f(t) = \begin{cases} 10\log(t^2 + t + 1) \\ 10t^3 - 20t^2 + t - 2 \end{cases}$$

en 7 nodos igualmente espaciados en el intervalo [-1,1].

1. Construya un spline cúbico ***s*** que interpola a **f** en esos puntos.

2. Dibuje la gráfica del error **e(t)=f(t)-s(t)** y estime el valor de la norma uniforme $\|\mathbf{e}\|_{[-1,1]}$. Compare con el resultado de la interpolación polinomial de la práctica anterior.

3. Los valores de las derivadas de f en los extremos del intervalo son aproximadamente f'(-1)=0.3 y f'(1)=-0.09. Construya el interpolador spline forzado y dibuje la gráfica de la diferencia entre los dos splines.

Problema 9

El ejemplo clásico de este mal comportamiento en las derivadas es la función de Runge dada por:

$$f(x) = \frac{1}{1+Nx^2}, \quad x\in[-1,1]$$

a. Elabore un programa en MatLab que calcule los polinomios de interpolación de f(x) de grados 10,11,12, y 13 y los grafique en un gráfico de Matrices tanto la f(x) como los polinomios respectivos.
b. Grafique usando spline natural cúbico, utilizando 6 segmentos polinomiales, usando su propia rutina
c. Grafique usando spline forzado cúbico, utilizando los puntos extremos como sus derivadas en los nodos 1 y -1.
d. Encuentre cual de las curvas splines b) o c) presentan menor error cometido

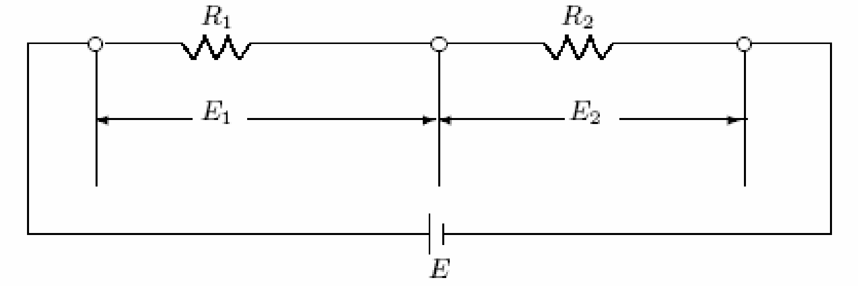
Problema 10

La ley de Ohm dice que: ***E= IR***

Donde ***E*** es el voltaje, ***I*** es la corriente, ***R*** es la resistencia, esto es, el gráfico de *E*x*I* es una recta de coeficiente angular ***R*** que pasa por el origen. Varios tipos de resistores, entretanto, no poseen esa propiedad lineal. Tales resistores son llamados resistores no lineales, o un varistor. Muchos tubos de vacío son varistores. Generalmente, la relación entre la corriente de un voltaje para un varistor puede ser aproximada por un polinomio de la forma:

$$I = a_1E + a_2E^2 + ... + a_nE^n = \sum_{i=1}^{n} a_iE^i + P_n(E)$$

Considere ahora un circuito consistiendo en un resistor lineal R_1 y un varistor R_2, como en la figura a



Las ecuaciones para el circuito son:

$$I = \frac{E_1}{R_1} = \sum_{i=1}^{n} a_iE_2^i$$

$$E = E_1 + E_2 \ ,$$

Y por tanto,

$$R_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i E_2^i\right) + E_2 \;=\; E \quad \text{ou} \quad R_1 P_n(E_2) + E_2 \;=\; E\ .$$

Suponga que un cierto experimento, los siguientes datos fueron obtenidos:

$E_2(Volts)$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
$I(Ampéres$	0.0	0.0125	0.06	0.195	0.5	1.0875	2.1	3.71	6.12	9.5625

a) Calcule el voltaje total E y el voltaje E_1 cuando E_2=2.3 Volts y R_1= 10 ohms, usando polinomio de interpolación sobre todos los puntos.

b) Use interpolación inversa de grado 2 para calcular la tensión en el Varistor cuando E_1= 10 Volts y R_1= 10 Ohms.

Problema 11

Escribir un programa en Matlab para:

(a) Determinar un polinomio de interpolación de Newton a partir de una función f(x) en n puntos equidistantes.

Nota: La función f(x), el grado del polinomio n y el intervalo [x1, x2] serán introducidos por el usuario.

(b) Construir un gráfico de la función y del polinomio.

(c) Construir una tabla con los valores de x, sin(x), Pn(x), En(x).

(d) Construir un gráfico con el error de truncamiento E(x) para x1 ≤ x ≤ x2.

(e) Pruebe su programa para tres funciones diferentes.

Problema 12

Un cable de tendido eléctrico entre dos postes adopta la forma de la curva llamada catenaria, que es la gráfica de f(x)=cosh(x).

a) Aproximar esta función en [−1,1] por un polinomio de interpolación de grado 2, p(x). Representar gráficamente ambas funciones.

b) Tabular la diferencia entre la función y el polinomio para valores de x variando de −1 a 1 a intervalos de 0,02. Representarla gráficamente e indicar el error máximo.

c) El error puede medirse globalmente en lugar de puntualmente utilizando la desviación cuadrática media de los valores tabulados,

$$E^2 = \frac{1}{101}\sum_{k=0}^{101}(f(x_k) - p(x_k))^2$$

Evaluar esta fórmula para la función dada.

d) Repetir los apartados anteriores aproximando mediante un polinomio de grado 4. ¿En qué proporción se han modificado los errores calculados? ¿Hay alguna razón para considerar polinomios de grado par?

Problema 13

Un modelo no lineal importante es el llamado "Ecuación de Promedio de Crecimiento de Saturación". Esta ecuación es particularmente útil en la caracterización de crecimientos poblacionales bajo condiciones limitantes y esta dada por:

$$y = \alpha \frac{x}{\beta + x}$$

a) Determinar la ecuación de la curva que aproxima a los valores contenidos en la tabla siguiente por el método de mínimos cuadrados:

x (seg)	1.00	3.00	5.00	10.00	15.00	21.00
y (habit. * 10^6)	0.89	1.32	1.46	1.59	1.64	1.66

b) Estimar la cantidad de habitantes a la que la población tiende a estabilizarse (obtenga la información usando límites).

c) Haga un gráfico de la curva obtenida y proponga un criterio en que, a través de un cambio de variables adecuado, la gráfica representada sea una recta. Calcule su pendiente.

Problema 14

Encontrar la ecuación cuadrática de regresión que se ajusta a los siguientes datos de la curva de una bomba:

I	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
q(m^3/s)	$1x10^{-4}$	$8x10^{-4}$	$1.4x10^{-3}$	$0.5x10^{-3}$	$1x10^{-3}$
H(m)	115	110	92.5	114	106

Cree su propia rutina y compárela con la función **polyfit**.
Prueba con un ajuste lineal y luego con un ajuste parabólico, luego compárelos mediante el factor de regresión y gráficamente. Comente sus resultados.

Problema 15

Elabore un programa para interpolación mediante splines para predecir la población en los Estados Unidos de América en los años 1920, 1965 y 2000, a partir de los siguientes datos:

Año	1930	1940	1950	1960	1970	1980
Población (en miles)	123,203	131,669	150,697	179,323	203,212	226,505

Compare sus resultados con:

- Una interpolación polinómica con todos los puntos
- Una Ajuste cuadrático

Grafique estas tres curvas y analice a su criterio cual de estas aproximaciones es más conveniente y explique sus razones.

Problema 16

El hidrograma es un gráfico utilizado en el estudio del comportamiento del cauce del agua (ríos, generalmente) durante e inmediatamente después de un período de lluvias. Este gráfico es trazado a partir de datos de caudales obtenidos a través de mediciones constantes a través de algunos días.

Los datos a continuación corresponden a una precipitación de 61,47 mm, ocurrida en el día Determinar una curva del caudal de un río, Q(t), en m3/s, para otros valores de tiempo, t (en horas), que no están tabulados.

t (horas)	*18*	*30*	*42*	*54*	*66*	*78*
Q (m3/s)	11.1	17.2	42	64.5	48.6	35.5
t (horas)	*90*	*102*	*114*	*126*	*140*	
Q (m3/s)	27.8	23.2	19.2	17.5	16.2	

En este proyecto, Ud. deberá interpolar los puntos de su tabla a través de cinco métodos diferentes:

a) Usando o polinomio de mayor grado posible;

b) Usando interpolación lineal por partes;

c) Usando interpolación cúbica por partes;

d) Usando el comando spline del MATLAB;

e) Usando un spline cúbico “natural” (formado por la función SpliNat, creada por el usuario).

Problema 17

La integral de una función f en un intervalo [a,b] se puede aproximar por la integral de un polinomio de interpolación de f.
Para evaluar la integral de probabilidades:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1.2} e^{-t^2}\, dt$$

Se dispone para la función $f(t) = e^{-t^2}$ de la siguiente tabla:

t_i	**0.0**	**0.3**	**0.4**	**0.6**	**0.8**	**1.0**	**1.2**
$f(t_i)$	1.000	0.914	0.852	0.698	0.527	0.368	0.237

Se pide:

a) Calcular P por medio de polinomios de interpolación de modo que se utilicen sólo polinomios de 2º grado (considerar una subdivisión adecuada del intervalo de integración).

b) Si se designa por $P(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, calcular utilizando los resultados obtenidos en a), los valores de P(0.0), P(0.4), p(0.8) y P(1.2) y construir con dichos valores un polinomio de interpolación de Newton de diferencias no divididas para P(x) y con dicho polinomio calcular P(0.52).

Problema 18

Considérese la tabla de valores:

i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$\mathbf{x_i}$	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$\mathbf{y_i}$	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

Ajuste un polinomio de segundo grado por el método de los cuadrados mínimos, y evalúe la magnitud del error total. Efectuar los cálculos redondeando al cuarto decimal.

Problema 19

Encontrar la ecuación cuadrática de regresión que se ajusta a los siguientes datos de la curva de una bomba:

I	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
q(m^3/s)	$1x10^{-4}$	$8x10^{-4}$	$1.4x10^{-3}$	$0.5x10^{-3}$	$1x10^{-3}$
H(m)	115	110	92.5	114	106

Cree su propia rutina y compárela con la función **polyfit**.

Problema 20

La distribución de la velocidad de un fluido **v(y)** cerca de una superficie plana está dada por:

i	y_i(m)	v_i(m/s)
0	0	0
1	0.001	0.4171
2	0.003	0.9080
3	0.006	1.6180

Además, el esfuerzo cortante **T** es:

T=u (dv/dy)

Donde **y** es la distancia a la superficie y **v** es la velocidad. Si el flujo es laminar y **u**=0.001N-s/m_2. Calcule el esfuerzo cortante (T) en:

a) y=0
b) y=0.002, usando la mejor aproximación posible.

c) Comente sus resultados.

Problema 21

a) Deduzca una fórmula de diferenciación para $f'(x_1)$, usando los puntos:

x0	x1	x2	x3	X4
f0	f1	f2	f3	f4

Donde **h** es la longitud de cada intervalo.

b) Tabule $f(x)=e^{x^2}\,\text{sen}(2x)$, en x=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4. Utilice la fórmula deducida en (a) para hallar f' (0.1).
c) Determine el error cometido.
d) Al estimar $f'(0.1)$ y f' (0.2), a su criterio que aproximación tendrá menos error. Demuéstrelo mediante cálculos.

Problema 22
Estudie el efecto del valor del parámetro h en las formulas regresivas, progresivas y centrales de primer orden para la diferenciación numérica de las funciones:
a) $f(x)=\sin x^2$ para x=0.5 y x=0.75
b) $f(x)=\ln(1+\exp(\cos(x))$ para x=2
c) Confirme las órdenes de convergencia de las fórmulas a determinar experimentalmente el valor óptimo de h teniendo en cuenta los errores aritméticos. Presente gráficos ilustrativos de la evolución del error con h.

Problema 23
Escriba un programa para el cálculo de la primera derivada por diferencias centrales Utilizando el proceso de extrapolación de Richardson. Aplique el progrma a algunos casos de prueba,para las funciones
a) $f(x)=\sqrt{1+\sin x+x^2}$
b) $f(x)=\ln(1+\exp(-x))$
Para varios valores de x

Los Profesores