Universidad Nacional de Ingeniería **23-09-2005**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2005-1**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

EXAMEN FINAL DE
CALCULO NUMERICO (MB535)

SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO.

Problema 1

a. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Demuestre que: $f[x_0, x_1, \Lambda\ , x_n] = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} x_i^{-1}$

b. Considere la siguiente formula de integración:

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-a) + f(a)$$

b.1 Determine el valor de a de modo que autoriza a esta regla la mayor aproximación.
b.2 ¿Cual es el grado de la formula? ¿Como se llama esta regla?

c. Verifique que la función $x(t) = \frac{t^2}{4}$, resuelve el problema de valor inicial:

$x' = \sqrt{x} \quad x(0) = 0$. Aplique el método de Taylor de orden 1 y explique porque la solución numérica difiere de la solución $\frac{t^2}{4}$.

d. En el siguiente problema de valor frontera: $\begin{array}{l} x''(t) - (1 - t/5)x'(t)x(t) = t \\ C.F.: x(1) = 2, x(3) = -1 \end{array}$

Usando los comandos del Matlab:
d.1) Definir la función en Matlab ff.m, que corresponde al lado derecho de la EDO:
$U' = F(t, U)$, con U vector.
d.2) Estima s_k (pendiente mejorada)

```
>>[T1,X1]=ode45(' ff ',[1 3],[2 ; -1])
     X1(end,1)= 1.6779
>>[T2,X2]=ode45(' ff ',[1 3],[2 ; -2])
     X2(end,1)= -0.9760
```

Problema 2

La viscosidad μ (centipoise) de cierto petróleo crudo varía con la temperatura T [°K], como se muestra a continuación:

T :	261	283	311
μ	50.1	10.0	4.9

El modelo para la viscosidad es: $\mu = \mu_0\, T^k$.

a) Usando un análisis por mínimos cuadrados, determinar μ_0 y k a partir de los datos.
b) Determine el factor de regresión y comente sus resultados.

Problema 3

Una aplicación de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias es el problema "depredador – presa". En un cierto hábitat viven conejos y linces, cuyas poblaciones en un instante t denotamos por x(t) y y(t), respectivamente. El modelo depredador – presa establece que x(t) e y(t) verifican el sistema:

x´(t) = A x(t) – B x(t) y(t), : x(0) = 3000 conejos
y´(t) = C x(t) y(t) – Dy(t) y(0) = 120 linces

Una simulación típica usaría como coeficientes, p.e., A =2, B=0.02, C= 0.0002, D= 0.8.
Use el método de Euler mejorado para resolver el sistema en el intervalo [0 , 0.2]usando h = 0.1.

Problema 4

La función de Debye es utilizada en termodinámica en el cálculo del calor específico del agua a volumen constante en ciertas sustancias. La función es expresada por:

$$D(x) = \frac{3}{x^3}\int_0^x \frac{y^3}{e^y - 1}dy$$

Obtener D(x) con un error menor a $0.5x10^{-5}$.

a) Cuál es la cuadratura que usaría? ¿Cuántos intervalos o puntos escogería para cumplir las exigencias pedidas? Aproxime $D(0.5)$.

b) Cuál es el error cometido, cumple dentro de la tolerancia exigida?

Nota $\left|f^{iv}(\xi)\right| \leq 45$**,** $\left|f^{vi}(\xi)\right| \leq 20.2$**, considerando** $f(y) = \frac{3}{0.5^3}\left(\frac{y^3}{e^y - 1}\right)$

Problema 5

Considere la ecuación diferencial ordinaria, que describe la distribución de la temperatura en una barra circular con fuente interna de calor S:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + S = 0$$

a) Deduzca el sistema de EDO de primer orden.

b) Resuelva la ecuación diferencial, usando el método de las diferencias finitas de orden 2, con $0 \leq r \leq 1$ y las condiciones de frontera $T(r=1) = 1$ $\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0$.

Para S=2 K/m^2. Tome h=0.25.

c) Estime el error porcentual cometido, Comente sus resultados.

(Sol ex. : $T(r)$= $(3 - r^2)/2$)

Nota: en r=0 aplicar $\lim_{r \to 0}\left(\frac{T'}{r}\right) = T''$

Los Profesores