

Sistemas Mecanicos SubActuados

Ing. Robert Gerardo Castro Salguero
Universidad Nacional de Ingenieria
Facultad de Ingenieria Electrica y Electronica
Seccion de Postgrado
Asesor PhD Arturo Rojas

Marzo del 2001

1 Control de Sistemas Mecánicos Subactuados



Figure 1: Fotografía del Acrobot

En esta sección presentamos algunas ideas sobre el control de sistemas mecánicos Subactuados usando switching y saturación. Enfocamos el problema de control swingup para una clase de robot gimnasta. La metodología está basada en linealización parcial de la realimentación en una primera etapa para linealizar los grados de libertad actuados seguido del control de transferencia de la energía del grado de libertad actuado al no actuado en una segunda etapa. En un típico control swingup el equilibrio es inestable en el sistema de lazo cerrado como consecuencia del comportamiento de fase no mínima del sistema. Por esta razón es necesario para el controlador switch en el tiempo apropiado para un controlador hacer el equilibrio estable. La exitosa implementación del control switching ha demostrado ser no trivial, tanto en la simulación como en la experimentación. Discutiremos ambos métodos de diseño global y local y presentaremos algunos resultados de la simulación.

1.1 Introducción

Sistemas mecánicos subactuados son aquellos con menos actuadores que grados de libertad y se eleva en varios caminos, de diseño intencional como el robot brachiation de Fokuda o el acrobot, en sistemas de robot móvil cuando un brazo manipulador es adherido a una plataforma móvil, un espacio de plataforma, o un vehículo sumergido, o porque el modelo matemático usado por el diseño de control como cuando una junta flexible es incluida en modelo. En tal sentido, entonces, todos los sistemas mecánicos son subactuados si uno desea modos de control flexible que no son directamente actuados (el problema de no colocación), o nivelar para incluir alguna cosa como actuador dinámico en la descripción del modelo. Consideraremos un sistema

de n grados de libertad con coordenadas generalizadas q^1, \dots, q^n , y $m \leq n$ actuadores, cada uno de los cuales actúa directamente en un simple grado de libertad. Particionamos el vector $q \in R^n$ de coordenadas generalizadas como $q_1 \in R^l$ y $q_2 \in R^m$, donde $q_1 \in R^l$ representa las juntas activas (actuadas). La ecuación de Euler-Lagrange del movimiento de tales sistemas son dadas por:

$$M_{11}\ddot{q}_1 + M_{12}\ddot{q}_2 + h_1 + \phi_1 = 0 \quad (1)$$

$$M_{21}\ddot{q}_1 + M_{22}\ddot{q}_2 + h_2 + \phi_2 = \tau \quad (2)$$

Donde:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Esta matriz de inercia es simétrica y definida positiva, las funciones vectoriales $h_1(q, \dot{q}) \in R^l$ y $h_2(q, \dot{q}) \in R^m$ contienen términos de Coriolis y centrífugos, la función vectorial $\phi_1(q) \in R^l$ y $\phi_2(q) \in R^m$ contiene términos gravitacionales, y $\tau \in R^m$, representa la fuerza de entrada generalizada producida por m actuadores en las juntas activas. Por simplicidad notacional de aquí en adelante no escribiremos la explícita dependencia de q de aquellos coeficientes.

1.2 Linearización Parcial de la Realimentación

A diferencia de sistemas completamente actuados, los cuales son siempre linealizables por realimentación, el sistema (1)-(2), es no linealizable en las coordenadas q , aunque en algunos casos, el sistema es linealizable después de transformación de coordenadas no lineales. Sin embargo, podemos linealizar una porción del sistema en la original coordenada q . Para ver esto consideremos la ecuación (1):

$$M_{11}\ddot{q}_1 + M_{12}\ddot{q}_2 + h_1 + \phi_1 = 0 \quad (4)$$

El término M_{11} es una matriz invertible $l \times l$ como una consecuencia de que la matriz de inercia del robot M es definida positiva en (3). Por lo tanto podemos resolver \ddot{q}_1 en la ecuación (4) como:

$$\ddot{q}_1 = -M_{11}^{-1}(M_{12}\ddot{q}_2 + h_1 + \phi_1) \quad (5)$$

Y sustituir la expresión resultante (5) en (2) para obtener:

$$\overline{M}_{22}\ddot{q}_2 + \overline{h}_2 + \overline{\phi}_2 = \tau \quad (6)$$

Donde los términos \overline{M}_{22} , \overline{h}_2 y $\overline{\phi}_2$ está dado por:

$$\overline{M}_{22} = M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}$$

$$\overline{h}_2 = h_2 - M_{21}M_{11}^{-1}h_1$$

$$\overline{\phi}_2 = \phi_2 - M_{21}M_{11}^{-1}\phi_1$$

Se puede demostrar que la matriz \overline{M}_{22} es tambien simetrica y definida positiva. Un controlador de linearizacion parcial de la realimentacion puede por lo tanto ser definido por la ecuacion (6) de acuerdo a:

$$\tau = \overline{M}_{22}u + \overline{h}_2 + \overline{\phi}_2 \quad (7)$$

Donde $u \in R^m$ es una entrada de control adicional. El sistema completo hasta este punto puede ser escrito como:

$$M_{11}\ddot{q}_1 + h_1 + \phi_1 = -M_{12}u \quad (8)$$

$$\ddot{q}_2 = u \quad (9)$$

Haciendo:

$$u = -k_1q_2 - k_2\ddot{q}_2 + \overline{u} \quad (10)$$

Y definiendo variables de estado:

$$z_1 = q_2 \quad z_2 = \ddot{q}_2 \quad \eta_1 = q_1 \quad \eta_2 = \dot{q}_2 \quad (11)$$

Podemos escribir en sistema en espacios de estado como:

$$\dot{z} = Az + B\overline{u} \quad (12)$$

$$\ddot{\eta} = \omega(z, \eta, \overline{u}) \quad (13)$$

Donde $z^T = (z_1^T, z_2^T)$, $\eta^T = (\eta_1^T, \eta_2^T)$, y A es la matriz de Hurwitz. Vemos de (12) y (13) que $z = 0$ y $\overline{u} = 0$ define una invariante multiple es espacio de estado. Desde que A es una matriz de Hurwitz para valores positivos de ganancia en las matrices k_p y k_d esto resulta atractivo. La dinamica de la manipulacion esta dada por:

$$\ddot{\eta} = \omega(0, \eta) \quad (14)$$

Tomaremos como punto inicial del problema el diseno de la entrada de control u para estabilizar el sistema (12)-(13). Esta clase de sistemas falla en algunas clases de sistemas realimentados.

1.3 El Acrobot

El Acrobot es un robot en el plano con dos eslabones con un simple actuador en el codo. Las ecuaciones de movimiento estan dados por (4):

$$m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + h_1 + \phi_1 = 0 \quad (15)$$

$$m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + h_2 + \phi_2 = \tau \quad (16)$$

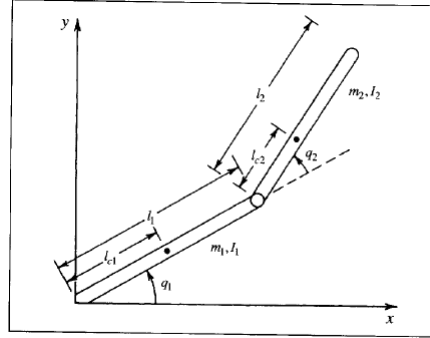


Fig. 1. The Acrobot.

Figure 2: Esquema del Acrobot

Donde:

$$m_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_1 + I_2$$

$$m_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$m_{12} = m_{21} = m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_2$$

$$h_1 = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1$$

$$h_2 = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2$$

$$\phi_1 = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(q_1) + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)$$

$$\phi_2 = m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)$$

Los parametros m_i , l_i , l_{ci} y I_i son masas, longitudes de eslabones, centros de masa y momentos de inercia respectivamente. La configuracin cero, $q_i = 0$, en este modelo corresponde al brazo extendido horizontalmente. Por lo tanto, la tarea del control es mover el robot de la configuracion vertical inferior, $q_1 = -\pi/2, q_2 = 0$, a la configuracin invertida: $q_1 = +\pi/2, q_2 = 0$.

1.3.1 Control usando switching y saturacion

La estrategia es la siguiente: Primero aplicamos el control de la linearizacion parcial de la realimentacion (7) con el termino de lazo mas externo dado por (10). El sistema resultante puede ser escrito como:

$$m_{11} \ddot{q}_1 + h_1 + \phi_1 = -m_{12} (\bar{u} - k_2 \dot{q}_2 - k_1 q_2) \quad (17)$$

$$\ddot{q}_2 + k_2 \dot{q}_2 + k_1 q_2 = \bar{u} \quad (18)$$

Elegimos el control adicional \bar{u} para balancear el segundo eslabon en fase con el movimiento del primer eslabon de tal forma que la amplitud del balanceo

del primer enlace incrementa en cada oscilacion. Esto puede ser alcanzado con control switching o control de saturacion. Se comprueba que la simple eleccion dada por:

$$\bar{u} = k_3 \text{sat}(\dot{q}_1) \quad (19)$$

Donde $\text{sat}()$ es la funcion de saturacion, incrementa la energia y levanta el acrobot. En el sistema de lazo cerrado, la configuracion de equilibrio estable en lazo abierto: $q_1 = -\pi/2, q_2 = 0$, se hace inestable y la trayectoria es conducida hacia la configuracion invertida. El paso final es para cambiar a un controlador de balance cuando el controlador \bar{u} alcanza el estado en la zona de atraccion del controlador de balance.

Se han investigado varios metodos para diseno de controladores de balance, principalmente pseudolinealizacion y metodo cuadratico lineal. La parte dificil de esta estrategia es disenar la ganancia k_i tal que el estado entero entra a la zona de atraccion del controlador de balance. Esto involucra busqueda para controladores robustos o controladores de balance con grandes zonas de atraccion y autosintonizacion de la ganancia, ambos de los cuales son problemas no triviales.

1.3.2 Control basado en Energia

Aplicaremos el control de la linealizacion parcial de la realimentacion, donde el sistema resultante puede ser escrito como:

$$m_{11}\ddot{q}_1 + h_1 + \phi_1 = -m_{12}(\bar{u} - k_2\dot{q}_2 - k_1q_2) \quad (20)$$

$$\ddot{q}_2 + k_2\dot{q}_2 + k_1q_2 = \bar{u} \quad (21)$$

Entonces elegimos el control adicional \bar{u} para balancear el segundo eslabon en fase con el movimiento del primero. Sea E la energia total del Acrobot:

$$E = \frac{1}{2}m_{11}\dot{q}_1^2 + m_{12}\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_{22}\dot{q}_2^2 + P(q_1, q_2) \quad (22)$$

Donde $P(q_1, q_2)$ es la energia potencial. Sea E_c la Energia del Acrobot en su posicion de balanceo, es decir la energia potencial en la configuracion $q_1 = \pi/2, q_2 = 0$. Haciendo $\tilde{E} = E - E_c$ y elegimos \bar{u} como:

$$\bar{u} = \text{sat}(\tilde{E}\dot{q}_1) \quad (23)$$

$$P(q_1, q_2) = m_1gl_{c1} \sin q_1 + m_2g(l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \quad (24)$$

$$E_c = m_1gl_{c1} + m_2g(l_1 + l_{c2}) \quad (25)$$

Donde $\text{sat}()$, es la funcion de saturacion. La energia total E deberia converger a E_c , mientras q_2 y \dot{q}_2 converge a cero. La trayectoria de estado debera converger a un conjunto invariante consistente en la union de las dos configuraciones de equilibrio $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (\pm\pi/2, 0, 0, 0)$. Con el conjunto $(E, \dot{E}_1, q_2, \dot{q}_2) = (E_c, 0, 0, 0)$. El paso final es cambiar a un controlador de balance cuando se alcanza un estado cercano a la zona de atraccion.

1.3.3 Linealización de la union sin actuador

Denominado el caso no colocado, (non-collocated):

$$m_{12}\ddot{q}_2 + h_1 + \phi_1 = -m_{11}v_1 \quad (26)$$

$$\ddot{q}_1 = v_1 \quad (27)$$

Si $q_1^d(t)$ es una trayectoria de referencia dada. Para q_1 podemos elegir el termino de entrada v_1 , como:

$$v_1 = \ddot{q}_1^d + k_d(\dot{q}_1^d - \dot{q}_1) + k_p(q_1^d - q_1) \quad (28)$$

Donde k_p y k_d son ganancias positivas. Considerando: $q_1^d = \pi/2$ y $\dot{q}_1^d = \ddot{q}_1^d = 0$ y haciendo: $\dot{q}_1 = z_1$, $\dot{q}_2 = z_2$, se tiene:

$$\dot{q}_1 = z_1$$

$$\dot{q}_2 = z_2$$

$$\dot{z}_1 = k_p(\pi/2 - q_1) - k_d z_1$$

$$\dot{z}_2 = \frac{-d_{11}(k_p(\pi/2 - q_1) - k_d z_1) - h_1 - \phi_1}{d_{12}}$$

Se ha realizado una simulacion usando los siguientes parametros $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_{c1} = 0.5$, $l_{c2} = 1$, $I_1 = 0.083$, $I_2 = 0.33$, $g = 9.8$, $k_p = 20$, $k_d = 8$, ver la siguiente figura:

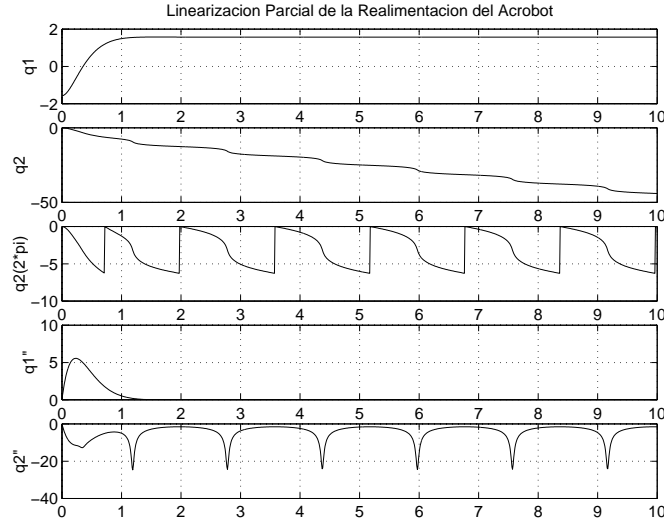


Figure 3: Control mediante Linearización Parcial de la Realimentacion

Se observa que el eslabon 2, rota 360 grados en estado estable. El problema de sintonizacion consiste en elegir un juego de ganancias para mover el

acrobot tan cerca posible del punto de equilibrio y entonces cambiar al controlador de balance. Se ilustra este proceso usando un Regulador Cuadratico Lineal, para balancear el Acrobot cerca a la vertical. La linearizacion de la dinamica del Acrobot cerca del equilibrio vertical, $q_1 = \pi/2$, $q_2 = 0$ resulta en un sistema lineal controlable: $\ddot{x} = Ax + Bu$

Donde el vector de estado $x = (q_1 - \pi/2, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$, la entrada $u = \tau$, y las matrices A y B , estan dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12.49 & -12.54 & 0 & 0 \\ -14.49 & 29.36 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.98 \\ 5.98 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando LQR, con MatLab:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y $R = 1$, con el controlador de realimentacion de estado $u = -kx$, donde, $k = [-242.52 \ -96.33 \ -104.59 \ -49.05]$, esta ley de control lineal es aplicada cuando el acrobot alcanza una posicion cercana a la vertical. La siguiente figura muestra un exitoso control usando linealizacion parcial de la realimentacion seguido de un Regulador Cuadratico Lineal.

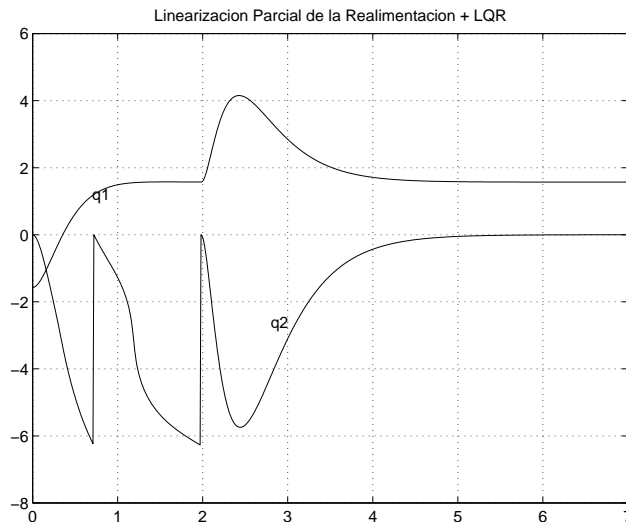


Figure 4: control usando linealizacion parcial de la realimentacion seguido de un Regulador Cuadratico Lineal

1.4 Aplicacion del Control Predictivo al Acrobot

1.4.1 Ecuaciones dinámicas del sistema

$$M_{11}\ddot{q}_1 + M_{12}\ddot{q}_2 + h_1 + \phi_1 = 0 \quad (29)$$

$$M_{21}\ddot{q}_1 + M_{22}\ddot{q}_2 + h_2 + \phi_2 = \tau \quad (30)$$

Vector de estados:

$$\bar{x} = [q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2]$$

El sistema se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \right)$$

Ademas, considerando: $\dot{q}_1 = z_1$, y $\dot{q}_2 = z_2$, considerando un entrada $u = \tau$ y las salidas $y_1 = q_1$ y $y_2 = q_2$, el sistema tendra la forma:

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix} \quad (31)$$

1.4.2 Linealizacion del sistema

Hacemos uso de la matriz Jacobiana que está dada por :

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q_1} & \frac{\partial f_3}{\partial q_2} & \frac{\partial f_3}{\partial z_1} & \frac{\partial f_3}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial q_1} & \frac{\partial f_4}{\partial q_2} & \frac{\partial f_4}{\partial z_1} & \frac{\partial f_4}{\partial z_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Usando el Toolbox de matemática simbólica para el modelo no lineal y cálculo de los Jacobianos en el punto de operación:

```

% Codificación en Matlab:
m1=1; m2=1; l1=1; l2=1; lc1=0.5;
lc2=1; I1=0.083; I2=0.33;g=9.8;
syms m11 m22 m12 m21 h1 h2 q1 q2 z1 z2 M phi1 phi2 phi h tau u
m11=m1*lc1*lc1+m2*(l1*l2+lc2*lv2+2*l1*lc2*cos(q2))+I1+I2;
m22=m2*lc2*lc2+I2;
m12=m2*(lc2*lc2+l1*lc2*cos(q2))+I2; m21=m12;
h1=-m2*l1*lc2*sin(q2)*z2*z2-2*m2*l1*lc2*sin(q2)*z2*z1;
h2=m2*l1*lc2*sin(q2)*z1*z1;
phi1=(m1*lc1+m2*l1)*g*cos(q1)+m2*lc2*g*cos(q1+q2);
phi2=m2*lc2*g*cos(q1+q2);
M=[m11 m12; m21 m22];
h=[h1;h2];
phi=[phi1;phi2];
tau=[0;u];
QQ=inv(M)*(tau-h-phi);
f=[z1; z2; QQ(1,1); QQ(2,1)]; v=[q1, q2, z1, z2]; U=[u]; q1=-pi/2; q2=0;
z1=0; z2=0; u=0;
A=subs(jacobian(f,v))
B=subs(jacobian(f,U))
C=[1 0 0 0; 0 1 0 0]
D=[0;0]
Luego de reemplazar valores tendremos:

```

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12.49 & -12.54 & 0 & 0 \\ -14.49 & 29.36 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.98 \\ 5.98 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Representación del sistema linealizado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

1.4.3 Resultados de la simulación del sistema

Se ha implementado un programa para control predictivo, tanto control egoista como solidario y no se ha logrado controlar el sistema, al parecer debido a que la respuesta al escalon crece rapidamente y el sistema es inestable.

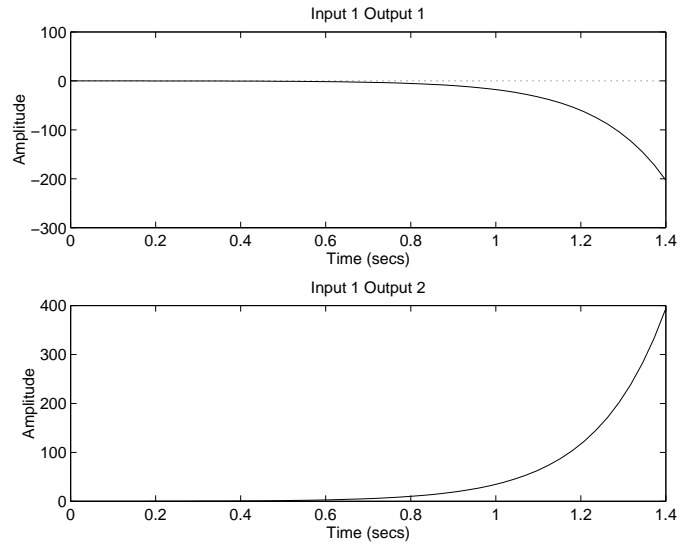


Figure 5: Respuesta al escalon

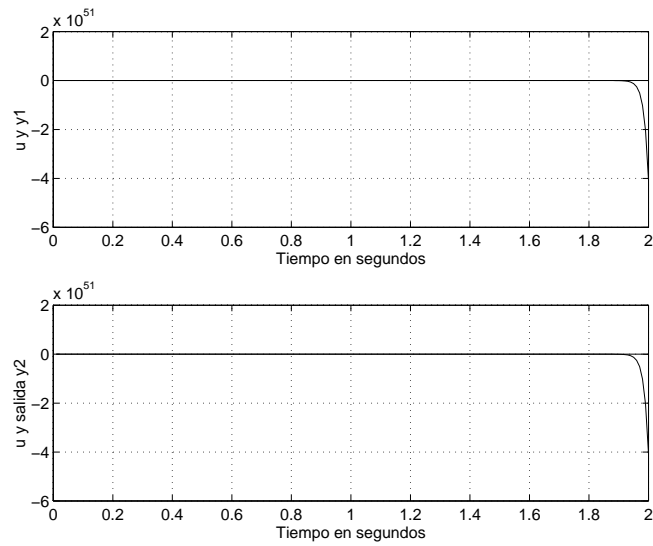


Figure 6: Simulacion del Control Predictivo

1.5 Control en modo deslizante del Acrobot

Se utiliza una estructura de manipulador dinámico y segundo método de Lyapunov a fin de estabilizar la superficie de deslizamiento de la intersección de la superficie switching de una manera directa:

1.5.1 Esquema de Control en modo deslizante

La ecuación genérica de un robot rígido de dos eslabones.

$$u = M(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (32)$$

Donde $u = [\tau_1 \tau_2]^T$, para el Acrobot consideraremos $\tau_1 = 0$, se ha tomado el modelo del paper "Simple sliding mode control scheme applied to robot manipulator" de Bailey y Arapostathis (1987) y se ha adaptado al presente trabajo y los resultados se verán en la siguiente sección:

1.5.2 Simulación del Control en modo deslizante del Acrobot

Existe un único actuador en el codo y solo se logra controlar el eslabón 2, q_2 , mientras que el eslabón 1, oscila ligeramente alrededor de su posición inicial.

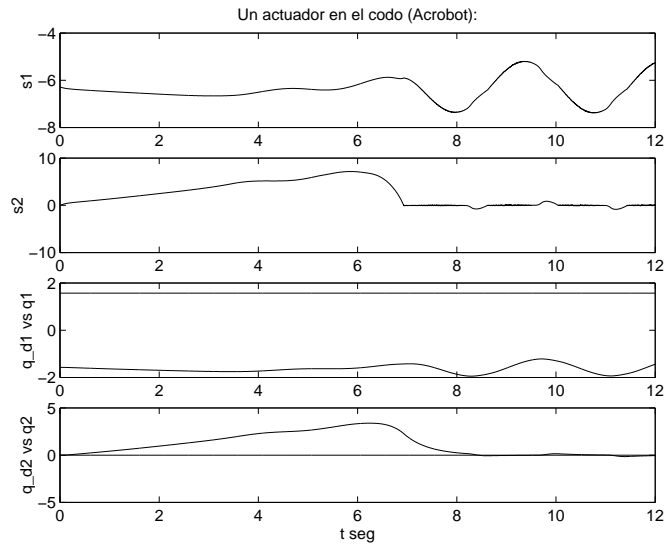


Figure 7: Control deslizante del Acrobot

1.5.3 Simulación del Control en modo deslizante sin actuador en el codo

Existe un unico actuador y se logra controlar el eslabon 1, q_1 , que va de $-\pi/2$ a $+\pi/2$, mientras que el eslabon 2, esta girando.

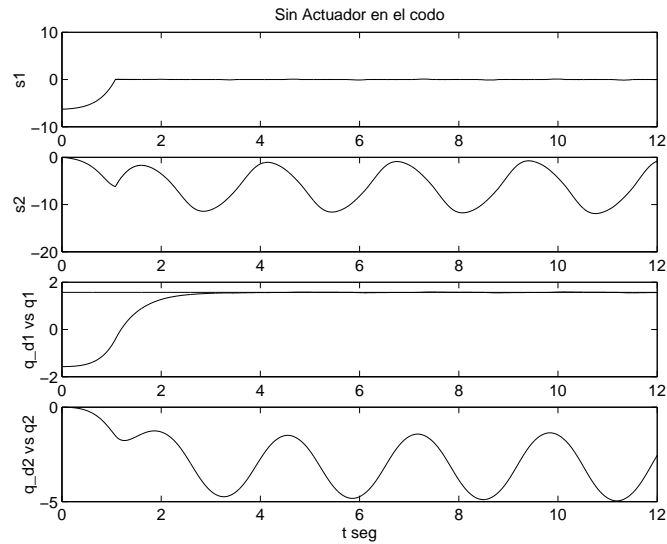


Figure 8: Sin actuador en el codo

1.5.4 Simulación del Control en modo deslizante con dos actuadores

Aqui si se consigue controlar los dos angulos q_1 y q_2 de $(-\pi/2, 0)$ a $(\pi/2, 0)$: Al parecer el control deslizante no permite controlar el acrobot, talvez habria que combinarlo con alguna otra tecnica para obtener mejores resultados.

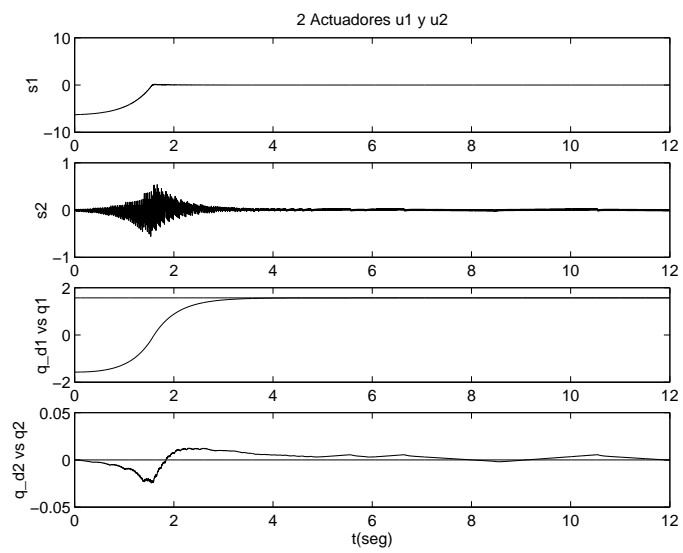


Figure 9: Dos actuadores